华章数学译丛

HZ BOOKS 华章教育

50

CAMBRIDGE

An Elementary Introduction to Mathematical Finance

(Third Edition)

数理金融初步

（原书第3版）

（美）Sheldon M. Ross 著
南加州大学
冉启康 译



华 章 数 学 译 丛

50

An Elementary Introduction to Mathematical Finance

(Third Edition)

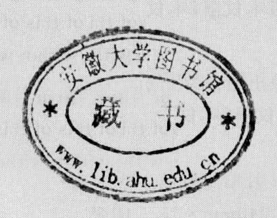
数理金融初步

（原书第3版）

（美） Sheldon M. Ross 著

南加州大学

冉启康 译



机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

数理金融初步（原书第3版）/（美）罗斯（Ross，S. M.）著；冉启康译．—北京：机械工业出版社，2013.2
（华章数学译丛）
书名原文：An Elementary Introduction to Mathematical Finance，Third Edition
ISBN 978-7-111-41109-3
Ⅰ．数…　Ⅱ．①罗…　②冉…　Ⅲ．金融学－数理经济学　Ⅳ．F830
中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第003171号

本书版权登记号：图字：01-2011-7865

本书清晰简洁地阐述了数理金融学的基本问题，主要包括套利、Black-Scholes期权定价公式以及效用函数、最优资产组合原理、资本资产定价模型等知识，并将书中所讨论的问题的经济背景、解决这些问题的数学方法和基本思想系统地展示给读者．

本书内容选择得当、结构安排合理，既适合作为高等院校学生（包括财经类专业及应用数学专业）的教材，同时也适合从事金融工作的人员阅读．

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037）
责任编辑：迟振春
北京市荣盛彩色印刷有限公司印刷
2013年2月第1版第1次印刷
186mm×240mm·15.5印张
标准书号：ISBN 978-7-111-41109-3
定　价：39.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
客服热线：（010）88378991　88361066　　投稿热线：（010）88379604
购书热线：（010）68326294　88379649　68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

译 者 序

数理金融学是一门数学与金融学交叉的前沿学科，其核心内容是研究不确定随机环境下的投资组合的最优选择理论和资产的定价理论. 套利、最优与均衡是数理金融学的基本经济思想和三大基本概念.

近几年来，数理金融学在国际金融界和数学界得到了越来越广泛的重视，国内外出版了大量有关数理金融方面的专著和教科书，然而这些书中，在阐述其主要内容(如关于期权的定价理论等)时，大都直接或间接地使用了随机过程、随机分析、运筹学等现代数学知识，并且把这些知识作为读者已经掌握的东西. 而另一方面，目前一般大学本科生所掌握的数学工具主要是微积分、线性代数和初等概率论，此类著作中涉及的现代数学知识远远超出了包括数学专业在内的大学生的知识范畴，甚至金融投资部门从事实际工作的专业人员也难以理解. 本书的出现使人感到眼前一亮. 本书以 Black-Scholes 期权定价理论为核心，系统、全面地介绍了数理金融学的基本内容. 书中将读者应该具备的数学基础严格限定在包括经济、金融、管理等专业的绝大多数本科生的水平，甚至连初等概率和基本的复利理论也从头讲起，并且由于作者在内容选择、结构安排和逻辑体系设计方面的精巧构思，所以能以相对较少的篇幅，把书中所讨论的问题的经济背景以及解决这些问题的数学方法和基本思想，系统而又简洁明快地展示给读者，其中某些问题的讲述还具有相当的深度. 此外，作者还非常注意金融实践活动中常用计算技术的介绍，相信那些从事实际工作的读者以及对该学科感兴趣的在校本科生会在这方面大为受益. 本书适合作为高等院校财经类专业、应用数学专业以及学习过微积分、线性代数课程的其他专业的本科生的教材，同时也适合从事金融工作的在职人员阅读.

本书第 2 版由南开大学陈典发等人在 2004 年翻译并出版，该书出版以来，受到了读者的广泛欢迎. 2011 年，原书作者 Sheldon M. Ross 对本书进行了修订，出版了第 3 版. 第 3 版在第 2 版的基础上做了大幅修改，为了满足国内读者的需要，我受机械工业出版社华章公司之托将第 3 版译成中文，在翻译过程中，参考了第 2 版的译本，在此向第 2 版的译者表示衷心的感谢！限于时间和水平，译文的不当之处在所难免，敬请读者和有关领域的专家批评指正.

冉启康
2012 年 10 月于上海财经大学

前　言

期权(合约)给其持有者按指定条款买进或卖出某种证券的权利(但不是义务). *看涨期权*(call option)给予买入权利，而*看跌期权*(put option)给予卖出权利，这两种期权都规定有*执行价*(exercise price)和*到期日*(exercise time). 此外，对期权的执行规定了两种标准的条件：*欧式*期权仅在到期日能行使权利，而*美式*期权行使权利的时间则可为到期日及此前任何时刻. 例如，若买进一个执行价为 K、到期日为 t 的期权，如果此期权是欧式的，那么其持有者有权在时刻 t 以价格 K 购买一股标的证券；而若是美式期权，持有者则有权在 t 及此前任何时刻进行这种购买.

对一个完善高效的期权市场，应该有一种有效的计算方法来(至少是近似地)估计各种期权的价值. 对看涨期权(不管是美式还是欧式)，用著名的 Black-Scholes 公式可作出这种估计. 该公式假定标的证券价格服从几何布朗运动. 也就是说，如果该证券在时刻 y 的价格是 $S(y)$，未来任意指定时刻 $t+y$ 的价格与 y 时刻价格之比独立于到 y 时刻为止的任何历史价格，并且服从均值和方差分别为 $t\mu$ 与 $t\sigma^2$ 的对数正态分布，即 $\log\left(\frac{S(t+y)}{S(y)}\right)$ 是均值为 $t\mu$、方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量. Black 和 Scholes 证明了：当价格服从几何布朗运动假设时，对看涨期权而言，存在这样一个唯一的价格，它不允许理想化的交易者凭借某种交易策略在任何情况下都确保获利. 这里，理想化交易者是指那些能够不花费任何交易成本而连续不断进行交易的人. 也就是说，当且仅当期权价格由 Black-Scholes 公式给出时，不存在确定性的赢利(*无套利*)机会. 此外，该价格仅依赖于几何布朗运动的方差参数 σ(以及当前利率、标的证券价格和期权的执行条件)，而与参数 μ 无关，由于参数 σ 度量了证券的波动性，故常称其为*波动参数*.

*风险中性*投资者是指只使用投资回报的期望现值来估计该项投资的价值的投资者. 如果这类投资者用一个几何布朗运动来模拟某种证券的价格随时间的变化，从而将涉及该证券的买和卖变成一种公平赌博，那么这些投资者基于该证券的看涨期权的估价恰好由 Black-Scholes 公式给出. 由于此原因，Black-Scholes 的期权估价也常被称为*风险中性估价*.

本书的首要目的是导出并解释 Black-Scholes 公式. 因为其推导需要用到一些概率论知识，所以本书的前三章重点讲述这些知识. 第 1 章介绍概率、概率试验和随机变量(取值为数，且每个取值由随机试验的结果所确定)，此外还介绍了随机变量的期望及方差的概念. 第 2 章介绍正态随机变量，这类随机变量的概率分布由一条钟形曲线决定. 该章还叙述了中心极限定理，该定理是概率论中最重要的理论结果，它指出：大量随机变量的和近似于一个正态随机变量. 第 3 章介

绍几何布朗运动，给出了其定义，讨论了如何从一些更简单过程的极限获得几何布朗运动，还证明了用它来描述证券价格的合理性.

讲述了必要的概率知识之后，在从第 4 章开始的第二部分中，介绍了利率和现值的概念. 支撑 Black-Scholes 公式的一个关键概念是套利，第 5 章专门讨论它. 在此章中我们说明在包括单期二叉树模型在内的各种情况下，如何使用套利进行定价. 第 6 章讨论套利定理，并在多期二叉树模型下，使用它导出期权唯一无套利价格的表达式. 在第 7 章，我们使用第 6 章的结果以及第 4 章中提出的几何布朗运动的近似方法，给出了看涨期权的 Black-Scholes 定价方程的一种简化推导. 此外还讨论了以期权价格作为其参数的函数所具有的性质，以及关于 delta 对冲套利策略的性质. 有关期权的其他性质放在第 8 章讨论，那里我们推导出当标的证券支付红利时相应期权的价格公式，给出了利用多期二叉树模型来确定美式看跌期权风险中性近似价格的方法，还讨论了当证券价格模型为一个布朗运动加上某个随机跳跃过程时相应期权无套利价格的确定问题，此外还给出了关于波动参数的几个不同估计量.

第 9 章指出：在许多情况下，仅仅考虑套利并不能唯一地确定期权的价格. 此时，起重要作用的是投资者的效用函数以及他们对各种投资可能结果概率的估计. 该章还介绍了均方差分析、风险价值和条件风险价值以及资本资产定价模型等概念.

第 10 章介绍随机序关系，这些关系常用于确定当投资者的效用函数没有完全确定时选择一类投资中的哪一个最好. 例如，如果一种投资的回报在一阶占优意义下比另一种投资的回报大，那么在投资者的效用函数是增函数的条件下，第一种投资好于第二种；如果一种投资的回报在二阶占优意义下比另一种投资的回报大，那么在投资者的效用函数是递增且为凹函数的条件下，第一种投资好于第二种.

第 11 章和第 12 章研究金融中的某些最优化模型，第 13 章介绍障碍期权、亚式期权和回望期权等非标准期权或称“奇异”期权. 我们将介绍如何使用蒙特卡罗模拟以及方差缩减技术来有效地确定这些期权的几何布朗运动风险中性估价.

即便人们对标的证券几何布朗运动模型的正确性存在疑问，Black-Scholes 公式仍是有用的. 只要我们承认该模型至少是近似有效的，使用该模型就可以给人这样一种观念：期权具有某个适当的价格. 因此，如果期权的实际交易价格低于此公式计算出来的价格，期权相对证券本身来说就是价格低估了，这就会导致人们考虑卖出证券而买入期权(若期权交易价格高于公式计算出来的价格，则会出现相反的情况). 第 14 章将指出：几何布朗运动并不总是能够拟合实际数据，因而需要考虑更一般的模型. 在商品价格情形下，许多交易商执着地相信存在着平均价格回归现象：某些商品的市场价格总是倾向于回复到某个固定的价格. 第 15 章提出一个较几何布朗运动更一般的模型，它可用于模拟这类商品的价格流.

本版的新内容

第 3 版对上一版的几乎所有章节都做了修改，主要修改的地方如下：

- 第 3 章已经被完全改写了，给出了带漂移的布朗运动过程的最大变量分布的基本推导，也给出了 Cameron-Martin 定理的一个基本证明.
- 改写了 7.5.2 节，明确了简单推导 Black-Scholes 看涨期权定价公式的偏导数的参数.
- 7.6 节是新加的，介绍了欧式看跌期权风险中性价格的单调性和凸性结果.
- 第 10 章是新加的. 这一章分别介绍了一阶随机占优、二阶随机占优以及似然比序. 特别地，在这一章里给出了这样一个结论(10.5.1 节)：当方差增加时，正态随机变量在二阶随机占优意义下是递减的.
- 第 2 版的第 10 章在新版中为第 11 章.
- 第 12 章是新加的，介绍了随机动态规划.
- 第 2 版的第 11 章在新版中为第 13 章，其中 13.9 节是新增的，介绍了障碍期权与回望期权的连续时间近似.
- 第 2 版的第 12 章在新版中为第 14 章.
- 第 2 版的第 13 章在新版中为第 15 章.

应提及的一个技术问题是：使用记号 $\log(x)$ 表示 x 的自然对数，即以 e 为底的对数，这里 e 定义为

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n,$$

其近似值为 2.718 28….

感谢 Ilan Adler 教授和 Shmuel Oren 教授的启发性交谈，感谢 Kyle Lin 先生提出许多宝贵的建议，感谢 Nahoya Takezawa 先生对全书提出整体修改意见以及他在最后几章有关数值计算方面所做的工作，还要感谢 Anthony Quas 教授、Daniel Naiman 教授和 Agostino Capponi 教授对上一版的有益评论.

目　录

第1章 概 率 论

1.1 概率和事件

考虑一个试验，以 S 表示该试验所有可能结果的集合，称之为样本空间．若试验中有 m 个可能的结果，我们一般把它们记为 1，2，…，m，所以 $S=\{1, 2, \cdots, m\}$．但是，当处理某些具体样本时，我们通常给它们一个描述性的名称．

例 1.1a i)掷一枚硬币的试验，试验的结果为硬币的正面朝上或反面朝上，样本空间为

$$S = \{h, t\},$$

其中 h 代表硬币正面朝上，t 代表反面朝上．

ii)掷两粒骰子的试验，结果由一对数(i, j)组成，其中 i 是第一粒骰子掷出的点数，j 是第二粒骰子掷出的点数，这样，此样本空间就包含下述 36 对数：

(1，1) (1，2) (1，3) (1，4) (1，5) (1，6)，
(2，1) (2，2) (2，3) (2，4) (2，5) (2，6)，
(3，1) (3，2) (3，3) (3，4) (3，5) (3，6)，
(4，1) (4，2) (4，3) (4，4) (4，5) (4，6)，
(5，1) (5，2) (5，3) (5，4) (5，5) (5，6)，
(6，1) (6，2) (6，3) (6，4) (6，5) (6，6)．

iii)r 匹马的赛马试验，马的编号为 1，2，3，…，r，比赛结果为马的名次，则样本空间为

$$S = \{1,2,3,\cdots,r \text{ 的全部名次排序}\}.$$

例如，若 $r=4$，比赛名次为 1 号马第一，4 号马第二，2 号马第三，3 号马第四，则对应的样本为{1，4，2，3}． □

再次考虑样本空间为 $S=\{1, 2, \cdots, m\}$的试验．现假定存在实数 $p_1, \cdots, p_m$，满足

$$p_i \geqslant 0, i = 1,\cdots,m, \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

使 p_i 为试验出现结果 i 的概率．

例 1.1b 在例 1.1a i)中，如果掷出硬币正面和反面的可能性相同，则称硬币是规则的或无偏的，对于一个规则硬币我们有

$$p_h = p_t = 1/2.$$

如果硬币有偏，且正面朝上的可能性是反面朝上的两倍，则有

$$p_h = 2/3, \quad p_t = 1/3.$$

在例 1.1a ii)中，若骰子是均匀的，则所有结果的可能性相同且为

$$p_{(i,j)} = 1/36, \quad 1 \leqslant i \leqslant 6, \quad 1 \leqslant j \leqslant 6.$$

在例 1.1a iii)中，若 $r=3$，则有和为 1 的 6 个非负数：

$$p_{1,2,3}, p_{1,3,2}, p_{2,1,3}, p_{2,3,1}, p_{3,1,2}, p_{3,2,1},$$

其中 $p_{i,j,k}$表示 i 号马第一，j 号马第二和 k 号马第三的概率. □

由试验可能结果组成的任何集合称为事件. 也就是说，事件是所有可能结果集合 S 的子集. 对任意事件 A，如果试验的结果出现在 A 中，则称事件 A *发生*. 若将 A 发生的概率记为 $P(A)$，那么可根据下面的等式确定它的值：

2

$$P(A) = \sum_{i \in A} p_i. \tag{1-1}$$

注意这意味着：

$$P(S) = \sum_{i} p_i = 1. \tag{1-2}$$

换句话说，试验结果属于样本空间的概率为 1，这是一个期望的结果，因为 S 包含了试验中所有可能的结果.

例 1.1c 掷一对质量均匀的骰子，如果事件 A 是点数和为 7，则

$$A=\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

且

$$P(A)=6/36=1/6.$$

若事件 B 表示点数和为 8，则

$$P(B) = p_{(2,6)} + p_{(3,5)} + p_{(4,4)} + p_{(5,3)} + p_{(6,2)} = 5/36.$$

在三匹马的赛马试验中，记事件 A 表示 1 号马赢，则 $A=\{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$，且

$$P(A) = p_{1,2,3} + p_{1,3,2}.$$ □

对于任意事件 A，称所有包含在 S 中但不包含在 A 中的事件组成的集合为 A 的补集，记为 A^c. 就是说，A^c 发生，当且仅当 A 不发生，由于

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i} p_i \\ &= \sum_{i \in A} p_i + \sum_{i \in A^c} p_i \\ &= P(A) + P(A^c), \end{aligned}$$

所以有

$$P(A^c) = 1 - P(A). \tag{1-3}$$

即不包含在 A 中的结果出现的概率为 1 减去事件 A 发生的概率. 样本空间 S 的补集为空集$\varnothing$，即不包含任何结果. 因为$\varnothing=S^c$，由等式(1-2)、(1-3)得到 [3]

$$P(\varnothing)=0.$$

对任何两个事件 A，B，定义 A，B 的并集为由所有属于 A 或属于 B 的事件组成的集合，记为 $A\cup B$. 相应地定义交集 AB(或写为 $A\cap B$)为所有同时属于 A 和 B 的结果组成的集合.

例 1.1d 掷两粒骰子，设 A 代表点数和为 10 这一事件，B 为两骰子的点数均为大于 3 的偶数，则

$A=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$，$B=\{(4,4),(4,6),(6,4),(6,6)\}$.

因此

$$A\cup B=\{(4,4),(4,6),(5,5),(6,4),(6,6)\},$$
$$AB=\{(4,6),(6,4)\}.$$

□

对于任意事件 A，B，有

$$P(A\cup B)=\sum_{i\in A\cup B}p_i,$$
$$P(A)=\sum_{i\in A}p_i,$$
$$P(B)=\sum_{i\in B}p_i.$$

由于 A，B 共有的结果在 $P(A)+P(B)$ 中计算了两次，而在 $P(A\cup B)$ 中只计算一次，所以有下面的结果，称之为*概率的加法定理*.

命题 1.1.1

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

即包含在 A 或 B 中的试验结果发生的概率，等于 A 事件发生的概率加上 B 事件发生的概率，减去 A 和 B 同时发生的概率. [4]

例 1.1e 设今天道-琼斯股票指数上升的概率为 0.54，明天上升的概率为 0.54，今明两天都上升的概率为 0.28. 道-琼斯指数在两天内都不上升的概率是多少?

解: 设事件 A 表示指数今天会上升，事件 B 表示指数明天会上升，则两天中指数至少有一天会上升的概率是

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=0.54+0.54-0.28=0.80.\end{aligned}$$

因此，今明两天都不上升的概率为 $1-0.80=0.20$. □

如果 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B *相互排斥*或*不相交*. 就是说，不可能同时发生的两

个事件是相互排斥的. 由于 $P(\varnothing)=0$，由命题 1.1.1 知，当 A，B 互斥时，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

1.2 条件概率

设两个小组打算各自生产一件产品，所生产的两件产品都将被分为合格和不合格两个等级. 于是这个试验的样本空间包括以下 4 个可能结果：

$$S=\{(a,a),(a,u),(u,a),(u,u)\},$$

这里，例如(a,u)代表第一组的产品合格，第二组的产品不合格. 设这些结果的概率如下：

$$P(a,a)=0.54,$$
$$P(a,u)=0.28,$$
$$P(u,a)=0.14,$$
$$P(u,u)=0.04.$$

5

如果已获知生产的产品中恰好有一个合格这个信息，那么该合格品是由第一组生产的概率为多少？为确定这一概率，进行以下推理：既然已知只有一个产品合格，则此时的结果只能是(a,u)或(u,a). 由于(a,u)出现的概率是(u,a)出现概率的 2 倍，那么在已知它们中有一个发生这一信息下应仍满足这个条件. 因此结果为(a,u)的概率为 2/3，结果为(u,a)的概率为 1/3.

记 $A=\{(a,u),(a,a)\}$表示第一组的产品合格，$B=\{(a,u),(u,a)\}$表示仅有一个组的产品合格. 在已知只有一个组产品合格的条件下第一组产品合格的概率称为 A 在 B 已发生条件下的条件概率，记为

$$P(A\mid B).$$

$P(A\mid B)$的一般公式可以类似以上讨论得到，即若已知事件 B 发生，为使事件 A 也发生，必须使出现的事件同时在 A 和 B 中，也就是说，此事件包含在 AB 中. 现在，既然 B 已经发生了，我们可以把 B 看成一个新的样本空间，因此 AB 发生的概率等于 AB 的概率除以 B 的概率，即

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1-4}$$

例 1.2a 掷两次硬币，设样本空间 $S=\{(h,h),(h,t),(t,h),(t,t)\}$中的四个样本点出现的概率相等，则在下面任一条件下，两次均为正面的条件概率为多少？

a)第一次掷出正面；

b)至少一次掷出正面.

解：记 $A=\{(h,h)\}$代表两次均为正面的事件；$B=\{(h,h),(h,t)\}$代表第一次掷币为正面；$C=\{(h,h),(h,t),(t,h)\}$代表至少有一次掷币为

正面，则

6

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$
$$=\frac{P(\{(h,h)\})}{P(\{(h,h),(h,t)\})}$$
$$=\frac{1/4}{2/4}$$
$$=1/2$$

和

$$P(A \mid C)=\frac{P(AC)}{P(C)}$$
$$=\frac{P(\{(h,h)\})}{P(\{(h,h),(h,t),(t,h)\})}$$
$$=\frac{1/4}{3/4}$$
$$=1/3.$$

许多人会感到惊奇，为何 a)和 b)部分的答案不相同？为了解答案不同的原因，请首先注意，在第一次掷币为正面的条件下，第二次投掷出现正反面仍是等概率的，所以 a)中概率为 1/2. 另一方面，知道至少有一次为正面等价于结果不是(t, t)，所以此事件包含三个等可能的结果，即(h, h)，(h, t)，(t, h)，说明 b)部分的概率为 1/3. □

由等式(1-4)得到

$$P(AB)=P(B)P(A \mid B). \tag{1-5}$$

这表示 A，B 同时发生的概率等于 B 发生的概率乘以 A 在 B 发生下发生的条件概率，这个结果称为*概率的乘法定理*.

例 1.2b 取球试验：一个罐里有 16 个球，9 个蓝球，7 个黄球，以不放回的方式从中任取两个球. 如果罐中每个球被取到的概率相同，问取到的两个球都是蓝球的概率是多少？

7

解： 设 B_1，B_2 分别表示第一次和第二次取出的为蓝球. 若已知第一次取出的为蓝球，则第二个球是从剩余 15 个球中取出的，其中 8 个为蓝球，所以 $P(B_2 \mid B_1)=8/15$，$P(B_1)=9/16$，因此

$$P(B_1B_2)=\frac{9}{16}\frac{8}{15}=\frac{3}{10}.$$
□

A 在 B 发生下发生的条件概率不等于 A 的无条件概率. 换句话说，当知道试验的结果为 B 的元素时，通常会改变该结果为 A 的元素这一事件的概率.（如果 A 和 B 相互排斥会出现什么情况?）在 $P(A \mid B)=P(A)$的特殊情形下，称为 A

独立于 B. 由于

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

所以，当

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{1-6}$$

时，A 是独立于 B 的. 式(1-6)的关系对于 A，B 是对称的，也就是说当 A 独立于 B 时，B 也独立于 A，即 A，B 是独立事件.

例 1.2c 设一股票当天的收盘价不低于前一天的收盘价的概率为 0.52，且相连两天的价格是相互独立的. 求此后四天内收盘价下跌而第五天不下跌的概率.

解： 记 A_i 表示第 i 天收盘价下跌的事件. 由独立性，有

8

$$\begin{aligned} P(A_1A_2A_3A_4A_5^c) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5^c) \\ &= (0.48)^4(0.52) = 0.0276. \end{aligned}$$ □

1.3 随机变量及其期望值

一个数值变量的值若由某个随机试验结果所决定，则称之为随机变量. 例如，掷骰子所得点数或多次掷一枚硬币掷出正面的次数，均为随机变量. 由于随机变量的值取决于试验的结果，所以可以赋予它取每个值的概率.

例 1.3a 设随机变量 X 表示掷一对骰子掷出的点数之和. X 可能的取值为 2，3，…，12，且它们的概率如下：

$$\begin{aligned}
&P\{X=2\} = P\{(1,1)\} = 1/36, \\
&P\{X=3\} = P\{(1,2),(2,1)\} = 2/36, \\
&P\{X=4\} = P\{(1,3),(2,2),(3,1)\} = 3/36, \\
&P\{X=5\} = P\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} = 4/36, \\
&P\{X=6\} = P\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} = 5/36, \\
&P\{X=7\} = P\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} = 6/36, \\
&P\{X=8\} = P\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} = 5/36, \\
&P\{X=9\} = P\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\} = 4/36, \\
&P\{X=10\} = P\{(4,6),(5,5),(6,4)\} = 3/36, \\
&P\{X=11\} = P\{(5,6),(6,5)\} = 2/36, \\
&P\{X=12\} = P\{(6,6)\} = 1/36.
\end{aligned}$$ □

设随机变量 X 的可能取值为 x_1，x_2，…，x_n，则概率集 $P\{X=x_j\}(j=1, \cdots, n)$称为随机变量 X 的概率分布. 由于 X 的取值都包含在这些值中，所以有

$$\sum_{j=1}^{n} P\{X = x_j\} = 1.$$

定义 设随机变量 X 取值为 x_1，x_2，…，x_n，X 的期望值记为 $E[X]$，定义如下：

[9]

$$E[X] = \sum_{j=1}^{n} x_j P\{X = x_j\}.$$

$E[X]$也称为 X 的期望或均值.

换言之，$E[X]$是 X 所有可能取值的加权值，权重等于 X 取相应值的概率.

例 1.3b 随机变量 X 表示一次赌博中所赢的金额. 假定该次赌博中有 60% 的机会输掉 1，有 20%的机会赢得 1，有 20%的机会赢得 2，试求 $E[X]$.

解：

$$E[X] = -1(0.6) + 1(0.2) + 2(0.2) = 0.$$

所以，在这次赌博中赢的期望数量为 0. 获胜期望值为零的赌博称为公平赌博. □

例 1.3c 随机变量 X 取 1 的概率为 p，取 0 的概率为$(1-p)$，这样的随机变量称为参数为 p 的伯努利随机变量，其期望值为

$$E[X] = 1(p) + 0(1-p) = p.$$ □

期望值的一个简单且有用的结果是：对于常数 a，b，有

$$E[aX + b] = aE[X] + b. \tag{1-7}$$

为证明式(1-7)，设 $Y=aX+b$. 由于 $X=x_j$ 时，$Y=ax_j+b$，所以

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{j=1}^{n} (ax_j + b) P\{X = x_j\} \\ &= \sum_{j=1}^{n} ax_j P\{X = x_j\} + \sum_{j=1}^{n} bP\{X = x_j\} \\ &= a\sum_{j=1}^{n} x_j P\{X = x_j\} + b\sum_{j=1}^{n} P\{X = x_j\} \\ &= aE[X] + b. \end{aligned}$$

[10]

另外一个重要的结果是随机变量和的期望值等于随机变量期望值的和.

命题 1.3.1 对于随机变量 X_1，X_2，…，X_k，有

$$E\left[\sum_{j=1}^{k} X_j\right] = \sum_{j=1}^{k} E[X_j].$$

例 1.3d 考虑 n 次独立试验，每次试验成功的概率为 p. 随机变量 X 是试验成功的次数，称之为参数为 n 和 p 的二项随机变量. 为了得到 X 的概率分布，考虑试验结果列 s，s，…，f，这意味着第一次成功，第二次成功，……，第 n

次失败，成功的总次数为 i 次，失败的总次数为 $n-i$ 次. 由独立性知，它发生的概率为 $p \cdot p \cdots (1-p) = p^i(1-p)^{n-i}$. 而 i 次成功、$n-i$ 次失败的结果列共有 $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!\ i!}$ 个，所以

$$P(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, i = 0,1,\cdots,n.$$

虽然可用前面的方法求 X 的期望值，即

$$E[X] = \sum_{i=0}^{n} iP(X=i) = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},$$

然后化简即可，但是用表达式

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

确定它的期望值将更容易，其中当第 j 次试验成功时 $X_j=1$，失败时 $X_j=0$. 由命题 1.3.1，有

$$E[X] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j] = np,$$

最后的等式用到了例 1.3c 的结果. □

如果与随机变量 X_1，X_2，…，X_n 的任何子集有关的概率，其取值与剩余部分的概率取值无关，则称它们是独立的. [11]

下面的结果将在第 3 章中用到。

命题 1.3.2 *考虑 n 次独立试验，设每次成功的概率为 p. 则在 n 次试验有 i 次成功的条件下，一个试验集中的事件发生的概率等于 $\binom{n}{i}$ 的倒数.*

证明：为了证明本命题，设 T 表示集合$\{1, 2, \cdots, n\}$的任意 i 个元素的子集，A 表示在 T 中的试验均为成功的事件，用 X 表示 n 次试验成功的次数，则有

$$P(A \mid X=i) = \frac{P(A, X=i)}{P(X=i)}.$$

显然，$P(A, X=i)$表示在 T 中的试验均为成功，不在 T 中的试验均为失败这一事件的概率，由试验的独立性知

$$P(A \mid X=i) = \frac{p^i(1-p)^{n-i}}{\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}} = \frac{1}{\binom{n}{i}}.$$

这就证明了结论. □

例 1.3e 设 N 个球中有 n 个红球，其余的为黑球，依次从中随机取出 k 个球. 若取出的第 i 个球为红球，令 $X_i=1$，若取出的是黑球，令 $X_i=0(i=1, \cdots, k)$.

如果以放回方式取球，则 X_1，X_2，…，X_n 是独立的，但如果以不放回方式取球，则此 n 个随机变量是不独立的.（为什么?） □

随机变量 X 可能取值的平均值由它的期望值表示，而其分散程度则可由它的方差来度量.

定义 *X 的方差记为 $\mathrm{Var}(X)$，定义为*

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E[X])^2].$$

[12]

换言之，方差等于 X 与它的期望值之差的平方的平均值.

例 1.3f 求参数为 p 的伯努利随机变量 X 的方差 $\mathrm{Var}(X)$.

解：因为 $E[X]=p$(见例 1.3c)，所以

$$(X - E[X])^2 = \begin{cases} (1-p)^2 & \text{以概率 } p, \\ p^2 & \text{以概率 } 1-p. \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E[(X - E[X])^2] \\ &= (1-p)^2 p + p^2(1-p) \\ &= p - p^2. \end{aligned}$$

□

如果 a，b 均为常数，则

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(aX + b) &= E[(aX + b - E[aX + b])^2] \\ &= E[(aX - aE[X])^2] \quad (\text{由等式(1-7)}) \\ &= E[a^2(X - E[X])^2] \\ &= a^2 \mathrm{Var}(X). \end{aligned} \tag{1-8}$$

虽然不是所有的随机变量之和的方差都等于各随机变量的方差之和，但当这些随机变量独立时，结论成立.

命题 1.3.3 *若 X_1，X_2，…，X_k 为独立的随机变量，则*

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{k} X_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Var}(X_j).$$

例 1.3g 求参数为 n，p 的二项随机变量 X 的方差.

解：由例 1.3d 知，X 代表 n 次独立试验中成功的次数(每一次成功的概率为 p)，它可表示为

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j,$$

[13]

其中若第 j 次成功时令 $X_j=1$，否则令 $X_j=0$. 因此，

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Var}(X_j) \quad (\text{由命题 1.3.3})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p(1-p) \quad (由例 1.3f)$$
$$= np(1-p).$$
□

方差的平方根称为标准差. 后面将会看到，随机变量基本上是在距其期望值几倍标准差范围内变化.

1.4 协方差和相关性

两个随机变量 X，Y 的协方差用 $\mathrm{Cov}(X, Y)$表示，它定义为

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])].$$

将期望值符号内的乘积展开，然后逐项求期望值，得到

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY]-E[X]E[Y].$$

协方差若是正值时表示 X，Y 同时增大，若是负值表示一个变量增大时另一个变量减小(独立随机变量间的协方差为 0).

例 1.4a 设 X，Y 均为伯努利随机变量，均只取 0 或 1. 由等式

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY]-E[X]E[Y]$$

并注意到 XY 取 0 还是取 1 决定于 X，Y 是否同时取 1，所以

[14]

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = P\{X=1,Y=1\}-P\{X=1\}P\{Y=1\}.$$

由此得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y)>0 &\Longleftrightarrow P\{X=1,Y=1\}>P\{X=1\}P\{Y=1\}\\ &\Longleftrightarrow \frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{X=1\}}>P\{Y=1\}\\ &\Longleftrightarrow P\{Y=1\mid X=1\}>P\{Y=1\}.\end{aligned}$$

也就是说，如果 $X=1$ 增大了 $Y=1$ 的可能性，则二者的协方差为正，反之，则二者的协方差为负. □

容易证明协方差具有下面几个性质. 对于随机变量 X，Y 和常数 c：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X),\\ &\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X),\\ &\mathrm{Cov}(cX,Y) = c\mathrm{Cov}(X,Y),\\ &\mathrm{Cov}(c,Y) = 0.\end{aligned}$$

协方差和期望值一样，也满足线性性质，即

$$\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y) = \mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y). \tag{1-9}$$

等式(1-9)的证明如下：

$$\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)= E[(X_1+X_2)Y]-E[X_1+X_2]E[Y]$$

$$= E[X_1Y + X_2Y] - (E[X_1] + E[X_2])E[Y]$$
$$= E[X_1Y] - E[X_1]E[Y] + E[X_2Y] - E[X_2]E[Y]$$
$$= \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mathrm{Cov}(X_2, Y).$$

等式(1-9)容易推广为下面很有用的等式：

$$\mathrm{Cov}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j). \tag{1-10}$$

由等式(1-10)推出很有用的多个随机变量之和的方差公式： 15

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \mathrm{Cov}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\Big)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} \mathrm{Cov}(X_i, X_j). \tag{1-11}$$

X 的取值随 Y 增大的程度可以用 X，Y 间的相关性来衡量，记为 $\rho(X, Y)$，定义如下：

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}.$$

由定义可知，

$$-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1.$$

若 X，Y 满足线性关系

$$Y = a + bX,$$

则当 b 为正值时，$\rho(X, Y)=1$，当 b 为负值时，$\rho(X, Y)=-1$.

1.5 条件期望

对随机变量 X 和 Y，在给定 $Y=y$ 的条件下，X 的条件期望定义为

$$E[X|Y = y) = \sum_{x} xP[X = x|Y = y].$$

即 X 在条件 $Y=y$ 下的条件期望，像 X 的普通期望一样是 X 的所有可能取值的加权平均，不过，x 值的权数不是 $X=x$ 的无条件概率，而是给定信息 $Y=y$ 下的条件概率.

条件期望的一个重要性质是 X 的期望值等于 X 在 $Y=y$ 条件下的条件期望的加权平均，即有以下命题. 16

命题 1.5.1

$$E[X] = \sum_{y} E[X|Y = y]P(Y = y)$$

证明:

$$\begin{aligned}\sum_y E[X|Y=y]P(Y=y) &= \sum_y \sum_x xP(X=x|Y=y)P(Y=y)\\ &= \sum_y \sum_x xP(X=x,Y=y)\\ &= \sum_x x\sum_y P(X=x,Y=y)\\ &= \sum_x xP(X=x)\\ &= E[X].\end{aligned}$$

□

设 $E[X|Y]$是随机变量 Y 的函数，当 $Y=y$ 时，定义它为 $E[X|Y=y]$. 由 Y 的任意函数(例如 $h(Y)$)的期望值能表示为(见练习 1.20)

$$E[h(Y)] = \sum_y h(y)P(Y=y),$$

得到

$$E[E[X|Y]] = \sum_y E[X|Y=y]P(Y=y).$$

因此，命题 1.5.1 可表示为

$$E[X] = E[E[X|Y]].$$

1.6 习题

练习 1.1 一个打字员在打一份报告时，出现 i 个错误的概率为 $p_i(i\geqslant 0)$，其中

17

$$p_0 = 0.20,\quad p_1 = 0.35,\quad p_2 = 0.25,\quad p_3 = 0.15.$$

求打字员出现下列错误的概率:

a)至少 4 个错误;

b)至多 2 个错误.

练习 1.2 一个家庭明天的野餐计划会视天气情况是多云还是下雨而决定是否延期. 设出现多云天气的概率为 0.40，出现雨天的概率为 0.30，出现多云兼雨天的概率为 0.20，求野餐不会延期的概率.

练习 1.3 如果从 8 位女士和 6 位男士中随机选出 2 人，问出现下列情况的概率是多少?

a)2 人均为女士;

b)2 人均为男士;

c)一位男士和一位女士.

练习 1.4 一个俱乐部有 120 位会员，其中 35 人只会下国际象棋，58 人只会打桥牌，27 人既会下国际象棋又会打桥牌. 如果从中随机选出一位会员，请

问满足下列条件的概率是多少?

a)已知该会员会打桥牌，又会下国际象棋;

b)已知该会员会下国际象棋，他又会打桥牌.

练习 1.5 囊肿性纤维化(CF)是一种遗传疾病. 一个孩子如果从父母那里各遗传到一个 CF 基因，则他会在十几岁之前发病，而且不会活到成年. 若一个孩子只遗传了一个或没有遗传到这种基因，他就不会发病. 如果一个人携带一个 CF 基因，则其每个孩子都会独立地以 1/2 的概率遗传到这个基因.

a)若父母各携带一个 CF 基因，则他们的孩子发病的概率是多少?

b)如果一个 30 岁的人，他有兄弟姐妹死于这种疾病，他没有发病但携带一个 CF 基因的概率是多少?

练习 1.6 从 52 张扑克牌中随机抽出两张牌. 如果已知两张牌的花色不同，则它们都是 A 的条件概率是多少? 18

练习 1.7 若 A，B 独立，证明下列事件也独立:

a)A 和 B^c;

b)A^c 和 B^c.

练习 1.8 一本讲赌博的书对轮盘赌博提出下面的建议：参赌者以 1 赌红，如果出现红色(概率为 18/38)，则其赢得 1 然后退出；如果输了这一局，可以进行第二次下注赌红，赌注加倍为 2，如果赢了就退出，依次类推. 记 X 为参赌者赢的局数.

a)求 $P\{X>0\}$.

b)求 $E[X]$.

练习 1.9 四辆公共汽车载着 152 位学生从同一学校出发去足球场. 四辆车分别乘载 39，33，46，34 位学生. 如果从 152 位学生中任意选取一位，记 X 为被选中的学生所乘坐的汽车里的学生数. 四辆公共汽车的司机也随机选取一位，令 Y 为那位司机驾驶的汽车里乘坐的学生人数.

a)你认为 $E[X]$和 $E[Y]$哪一个大?

b)求出 $E[X]$和 $E[Y]$.

练习 1.10 两位选手比赛乒乓球，当一个选手赢了两局时比赛结束. 设每位选手赢每一局的概率相等，且每一局的结果都是独立的. 求比赛总局数的期望值和方差.

练习 1.11 证明

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

提示：从方差的定义

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E[X])^2]$$

着手，展开右边的平方式，然后利用随机变量和的期望值等于期望值的和这一性质. 19

练习 1.12 一位律师要决定是收取固定费用5 000美元，还是收取胜诉酬金25 000美元(输掉则一无所获). 他估计打赢的概率为0.3. 求他收取的费用的均值和标准差，如果

a)收取固定费用；

b)收取胜诉酬金费用.

练习 1.13 设 X_1，X_2，…，X_n 为独立的随机变量，具有相同的分布，期望值为 μ，方差为 σ^2. 随机变量 $\overline{X}$ 为这些变量的算术平均值，称为样本均值，写成数学公式为

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}.$$

随机变量 S^2 定义为

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1},$$

称为样本方差.

a)证明 $E[\overline{X}]=\mu$；

b)证明 $\mathrm{Var}(\overline{X})=\sigma^2/n$；

c)证明 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2$；

d)证明 $E[S^2]=\sigma^2$.

练习 1.14 证明 $\mathrm{Cov}(X, Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$.

练习 1.15 证明

a)$\mathrm{Cov}(X, Y)=\mathrm{Cov}(Y, X)$；

b)$\mathrm{Cov}(X, X)=\mathrm{Var}(X)$；

c)$\mathrm{Cov}(cX, Y)=c\mathrm{Cov}(X, Y)$；

d)$\mathrm{Cov}(c, Y)=0$.

练习 1.16 如果 U，V 为独立的随机变量，方差均为1，当 X，Y 满足下列条件时，求 $\mathrm{Cov}(X, Y)$：

[20]

$$X=aU+bV,\quad Y=cU+dV.$$

练习 1.17 如果 $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)=ij$，求

a)$\mathrm{Cov}(X_1+X_2, X_3+X_4)$；

b)$\mathrm{Cov}(X_1+X_2+X_3, X_2+X_3+X_4)$.

练习 1.18 设在任意给定时间段内，某只股票价格只能等概率地增加1或减少1，且不同时期的股票变化是独立的. 记 X 为股票在第一时间段内增加1或减少1的数量，Y 为前三时间段内累计上升的数量，求 X，Y 间的相关性.

练习 1.19 能否构造两个随机变量 X，Y 使 $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Y)=1$，$\mathrm{Cov}(X, Y)=2$？

练习 1.20 如果 Y 是一个随机变量，h 是一个函数，那么 $h(Y)$ 也是一个随机变量. 设 $h(Y)$ 的所有可能取值为 $\{h_i, i\geqslant 1\}$，由期望的定义，有

$$E[h(Y)] = \sum_i h_i P(h(Y) = h_i).$$

另一方面，当 $Y=y$ 时，$h(Y)=h(y)$，从直观上看，应有

$$E[h(Y)] = \sum_y h(y) P(Y = y).$$

证明上述公式是正确的.

练习 1.21 随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 定义为

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

如果 X 的取值为 1，2，…，且 $F(x)$ 是一个已知函数，如何求得 $P(X=i)$？

参考文献

[1] Ross, S. M. (2010). A *First Course in Probability*, 8th ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

21

第2章　正态随机变量

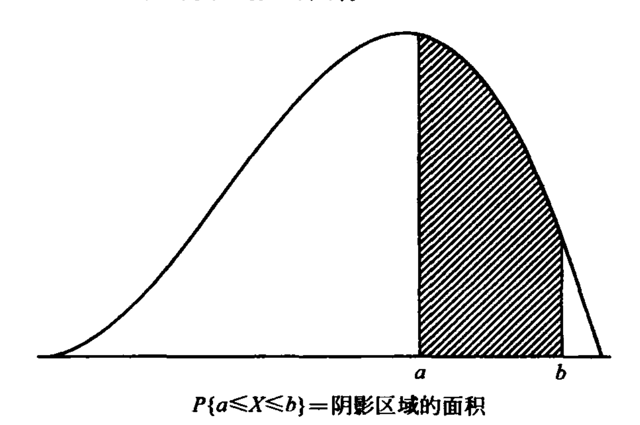
2.1　连续型随机变量

前一章介绍的随机变量，其所取的值都构成离散集合，但还有一些随机变量，其可能取值的集合是一个连续区间，我们称这样的随机变量为连续型随机变量．例如，完成一项任务需要花费的时间或随机选取的一个人的体重等，一般都被看成是连续型随机变量．

每个连续型随机变量 X 都对应一个函数 f，称为 X 的**概率密度函数**，它按下面的方式决定与 X 有关的概率：对任意实数 $a<b$，曲线 f 下方位于区间 $[a, b]$ 部分的面积等于 X 取值于 a，b 之间的概率．即

$$P\{a \leqslant X \leqslant b\} = f \text{ 与 } x=a,\ x=b \text{ 及 } x \text{ 轴所围的面积}.$$

图 2-1 给出了一个概率密度函数的图像．



$P\{a \leqslant X \leqslant b\}$＝阴影区域的面积

图 2-1　X 的概率密度函数

2.2　正态随机变量

一种非常重要的连续型随机变量是正态随机变量．正态随机变量 X 的密度函数由两个参数 μ，σ 决定，它由下面公式给出：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

正态概率密度函数是关于 $x=\mu$ 对称的钟形曲线，其变化情况可用 σ 来衡量．σ 越大，f 曲线的落差就越大．图 2-2 描述了三个不同的正态概率密度函数，注意曲线随 σ 增加而变得平坦．

可以证明，参数 μ，σ^2 分别等于变量 X 的期望值和方差，即

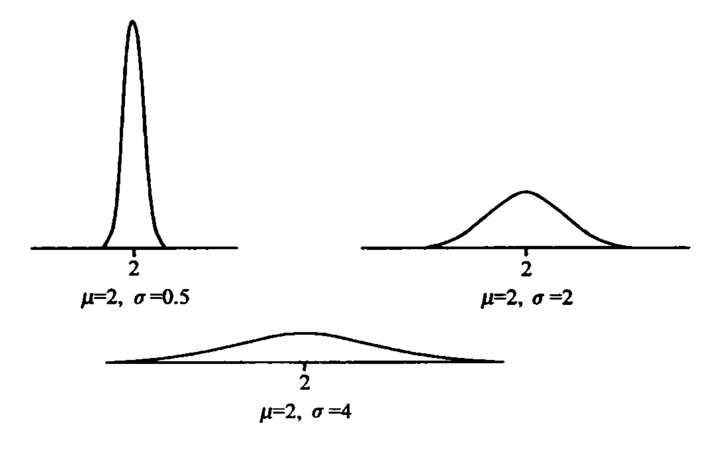


图 2-2 三个正态概率密度函数

22~23

$$\mu = E[X], \quad \sigma^2 = \mathrm{Var}(X).$$

均值为 0 方差为 1 的正态随机变量称为标准正态随机变量. 设 Z 为一标准正态随机变量，定义在实数域上的函数 $\Phi(x)$称为标准正态分布函数，如果满足

$$\Phi(x) = P\{Z \leqslant x\}.$$

因此 $\Phi(x)$表示一个标准正态随机变量小于或等于 x 的概率，它也等于标准正态密度函数曲线下方介于$(-\infty, x]$之间的面积：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

表 2-1 给出了当 $x>0$ 时相应 $\Phi(x)$的值，x 为负值时的概率可以根据标准正态密度函数的对称性(见图 2-3)

$$P\{Z < -x\} = P\{Z > x\}$$

求得，或等价地，

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

图 2-3 $P\{Z<-x\}=P\{Z>x\}$

表 2-1 $\Phi(x)=P\{Z\leqslant x\}$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

例 2.2a 设 Z 为一标准正态随机变量，对 $a<b$，将 $P\{a<Z\leqslant b\}$ 用 Φ 表示.

解： 由于

$$P\{Z\leqslant b\}=P\{Z\leqslant a\}+P\{a<Z\leqslant b\},$$

所以，

$$P\{a < Z \leqslant b\} = \Phi(b) - \Phi(a). \qquad \square$$

例 2.2b 由 $\Phi(x)$的取值表(精确到小数点后四位)知，

$$P\{|Z| \leqslant 1\} = P\{-1 \leqslant Z \leqslant 1\} = 0.682\,6,$$
$$P\{|Z| \leqslant 2\} = P\{-2 \leqslant Z \leqslant 2\} = 0.954\,4,$$
$$P\{|Z| \leqslant 3\} = P\{-3 \leqslant Z \leqslant 3\} = 0.997\,4. \qquad \square$$

当需要比表 2-1 中更精确的值时，用下面的公式来近似求 $\Phi(x)$，可以精确到小数点后六位：对 $x>0$，

$$\Phi(x) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}(a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + a_5 y^5),$$

其中

$$y = \frac{1}{1 + 0.231\,641\,9x},$$
$$a_1 = 0.319\,381\,530,$$
$$a_2 = -0.356\,563\,782,$$
$$a_3 = 1.781\,477\,937,$$
$$a_4 = -1.821\,255\,978,$$
$$a_5 = 1.330\,274\,429,$$

且

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

2.3 正态随机变量的性质

正态随机变量的一个重要性质是：如果 X 为正态随机变量，则对任何常数 a，b，$aX+b$ 也是正态随机变量. 此性质使我们可以将任一正态随机变量转换成标准正态随机变量. 事实上，设 X 是均值为 μ，方差为 σ^2 的正态随机变量，令

24～26

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma},$$

则由等式(1-7)、(1-8)，Z 的均值为 0，方差为 1，即 Z 为标准正态随机变量. 由此，我们可以利用标准正态分布函数 Φ 来计算任意正态随机变量的概率分布.

例 2.3a 设六年级学生的 IQ 测验成绩服从均值为 100，标准差为 14.2 的正态分布. 问随机抽出一个六年级学生其 IQ 成绩大于 130 的概率是多少？

解：设 X 为随机抽出的六年级学生的 IQ 成绩，则

$$\begin{aligned} P\{X>130\} &= P\left\{\frac{X-100}{14.2}>\frac{130-100}{14.2}\right\} \\ &= P\left\{\frac{X-100}{14.2}>2.113\right\} \\ &= 1-\Phi(2.113) \\ &= 0.017. \end{aligned}$$

□

例 2.3b 设 X 为正态随机变量，均值为 μ，标准差为 σ，则

$$|X-\mu| \leqslant a\sigma,$$

这等价于：

$$\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \leqslant a.$$

从例 2.2b 知，随机变量以 68.26%的概率取值在其均值的 1 倍标准差范围内，以 95.44%的概率取值于均值的 2 倍标准差范围内，以 99.74%的概率取值于均值的 3 倍标准差范围内. □

正态随机变量的另外一个重要性质是：独立正态随机变量的和仍然是正态随机变量. 即，若 X_1，X_2 为独立的正态随机变量，二者的均值分别为 μ_1，μ_2，标准差分别为 σ_1，σ_2，则 X_1+X_2 也是正态的，其均值为

$$E[X_1+X_2]=E[X_1]+E[X_2]=\mu_1+\mu_2,$$

27

方差为

$$\mathrm{Var}(X_1+X_2)=\mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)=\sigma_1^2+\sigma_2^2.$$

例 2.3c 俄亥俄州的克利夫兰每年的降雨量服从均值为 40.14 英寸，标准差为 8.7 英寸的正态分布，求连续两年的降雨量之和超过 84 英寸的概率.

解：设 X_i 为第 i 年的降雨量($i=1$，2)，且假设相继年间的降雨量是独立的，则 X_1+X_2 是正态的，均值为 80.28，方差为 $2(8.7)^2=151.38$. 设 Z 为标准正态随机变量，则

$$\begin{aligned} P\{X_1+X_2>84\} &= P\left\{Z>\frac{84-80.28}{\sqrt{151.38}}\right\} \\ &= P\{Z>0.3023\} \\ &\approx 0.3812. \end{aligned}$$

□

称随机变量 Y 为以 μ 和 σ 为参数的对数正态随机变量，如果 $\log(Y)$ 是均值为 μ，方差为 σ^2 的正态随机变量. 即 Y 为对数正态的，如果它可以表示为：

$$Y=\mathrm{e}^X,$$

其中 X 为正态随机变量，对数正态分布的均值和方差为：

$$E[Y]=e^{\mu+\sigma^2/2},$$

$$\mathrm{Var}(Y)=e^{2\mu+2\sigma^2}-e^{2\mu+\sigma^2}=e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1).$$

例 2.3d 给定初始时间，设 $S(n)$ 为某证券在 $n(n\geqslant1)$ 周后的价格，一个模拟这些价格变化的常用模型是假设价格比率 $S(n)/S(n-1)(n\geqslant1)$ 是独立同分布的对数正态随机变量，设参数 $\mu=0.016\,5$，$\sigma=0.073\,0$，求以下事件的概率：

a）此后两个星期证券价格连续上升；

28

b）两周后的证券价格高于今天的价格.

解：设 Z 为标准正态随机变量. 为求 a）的概率，注意到 $\log(x)$ 为 x 的增函数，且 $x>1$ 当且仅当 $\log(x)>\log(1)=0$. 所以，我们有：

$$\begin{aligned}P\left\{\frac{S(1)}{S(0)}>1\right\}&=P\left\{\log\left(\frac{S(1)}{S(0)}\right)>0\right\}\\&=P\left\{Z>\frac{-0.016\,5}{0.073\,0}\right\}\\&=P\{Z>-0.226\,0\}\\&=P\{Z<0.226\,0\}\\&\approx0.589\,4.\end{aligned}$$

因此，一周后价格上升的概率为 0.589 4，由于相邻的价格比率是独立的，所以连续两周价格上升的概率为 $(0.589\,4)^2=0.347\,4$.

下面解问题 b），原因如下：

$$\begin{aligned}P\left\{\frac{S(2)}{S(0)}>1\right\}&=P\left\{\frac{S(2)}{S(1)}\frac{S(1)}{S(0)}>1\right\}\\&=P\left\{\log\left(\frac{S(2)}{S(1)}\right)+\log\left(\frac{S(1)}{S(0)}\right)>0\right\}\\&=P\left\{Z>\frac{-0.033\,0}{0.073\,0\sqrt{2}}\right\}\\&=P\{Z>-0.319\,65\}\\&=P\{Z<0.319\,65\}\\&\approx0.625\,4,\end{aligned}$$

这里我们用到以下事实：作为两个均值为 0.016 5，标准差为 0.073 0 的独立正态随机变量的和，随机变量 $\log\left(\frac{S(2)}{S(1)}\right)+\log\left(\frac{S(1)}{S(0)}\right)$ 是均值为 0.033 0，方差为 $2(0.073\,0)^2$ 的正态随机变量. □

2.4 中心极限定理

正态随机变量的普遍性可以用中心极限定理来解释，此定理是概率论中一个最重要的结果. 它指出：大量独立同分布的随机变量之和所构成的随机变量近似于一个正态随机变量. 29

为了更确切地叙述中心极限定理，设 X_1，X_2，…为独立同分布的随机变量序列，它们共同的均值为 μ，方差为 σ^2，记

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

中心极限定理 *对足够大的 n，S_n 近似于均值为 $n\mu$，方差为 $n\sigma^2$ 的正态随机变量，即对任意 x，有*

$$P\left\{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right\} \approx \Phi(x),$$

且随着 n 的逐步增大，近似程度变得越来越高.

设 X 是参数为 n，p 的二项随机变量，由于 X 代表 n 个独立试验成功的次数，每一次成功的概率为 p，X 可表示为

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

其中 X_i 当第 i 次试验成功时取 1，否则取 0，由于(根据 1.3 节)

$$E[X_i]=p,\ \mathrm{Var}(X_i)=p(1-p),$$

根据中心极限定理，当 n 很大时，X 近似服从均值为 np，方差为 $np(1-p)$的正态分布.

例 2.4a 掷一均匀硬币 100 次，求出现正面的次数小于 40 的概率.

解： 设 X 为出现正面的次数，则 X 是参数 $n=100$，$p=1/2$ 的二项随机变量，由于 $np=50$，$np(1-p)=25$，所以 30

$$\begin{aligned} P\{X < 40\} &= P\left\{\frac{X-50}{\sqrt{25}} < \frac{40-50}{\sqrt{25}}\right\} \\ &= P\left\{\frac{X-50}{\sqrt{25}} < -2\right\} \\ &\approx \Phi(-2) \\ &= 0.022\,8. \end{aligned}$$

用计算机程序计算二项概率得到的准确结果为 0.017 6，所以上面的近似效果不是很好. 但是注意到，X 是一个取整数值的随机变量，事件 $X<40$ 等价于 $X<39+c, 0<c\leqslant 1$. 所以，可以通过计算 $P\{X<39.5\}$获得更好的近似值，即

$$P\{X<39.5\}=P\left\{\frac{X-50}{\sqrt{25}}<\frac{39.5-50}{\sqrt{25}}\right\}$$
$$=P\left\{\frac{X-50}{\sqrt{25}}<-2.1\right\}$$
$$\approx\Phi(-2.1)$$
$$=0.0179,$$

可以看到，近似程度确实有了很大的提高. □

2.5 习题

练习 2.1 对标准正态随机变量 Z，求：

a) $P\{Z<-0.66\}$；

b) $P\{|Z|<1.64\}$；

c) $P\{|Z|>2.20\}$.

练习 2.2 Z 为标准正态随机变量，求 x 的值，使它满足：

31

$$P\{-2<Z<-1\}=P\{1<Z<x\}.$$

练习 2.3 设 Z 为标准正态随机变量，证明：

$$P\{|Z|>x\}=2P\{Z>x\}\quad(x>0).$$

练习 2.4 设 X 为正态随机变量，均值为 μ，方差为 σ^2，$Y=a+bX$，如果 Y 和 X 服从相同的分布，求 a，b 的值($a\neq0$)，并求出 $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

练习 2.5 成年男子的血液收缩压服从均值为 127.7，标准差为 19.2 的正态分布，求

a)68%的成年男子血液收缩压的取值范围；

b)95%的成年男子血液收缩压的取值范围；

c)99.7%的成年男子血液收缩压的取值范围.

练习 2.6 设某种电池的使用寿命服从均值为 400 小时，标准差为 50 小时的正态分布，现有两节此种电池，当一节用完时用另一节，求

a)两节电池的总寿命超过 760 小时的概率；

b)第二节电池的寿命比第一节电池长至少 25 小时的概率；

c)寿命较长的一节电池比另一节电池的寿命至少长 25 小时的概率.

练习 2.7 加洗一张照片的时间服从均值为 18 秒，标准差为 1 秒的正态分布，估计在下列时间下加洗 100 张照片的概率：

a)长于 1 710 秒；

32

b)在 1 690 秒和 1 710 秒之间.

练习 2.8 沿某条航线经常来往的乘客每年飞行的距离是一均值为 25 000 英里，标准差为 12 000 英里的随机变量，如果随机选出 30 位这样的乘客，估计今年他们飞行的平均距离满足以下条件的概率：

a)超过 25 000 英里；

b)在 23 000 英里和 27 000 英里之间.

练习 2.9 关于股价变动的一个模型假定：若现在某股票的股价为 s，则过一单位时间，它会以概率 p 变为 us 或以概率 $1-p$ 变为 ds，设每个时间段的价格变化是独立的，估计 1 000 单位时间后股价至少上升 30% 的概率，其中 $u=1.012$，$d=0.990$，$p=0.52$.

练习 2.10 在每个时间段内，某股票的股价会以 0.39 的概率下降 1，以 0.20 的概率保持不变，以 0.41 的概率上升 1，设股价在每个时间段的变化是独立的，估计 700 个时间段后，股价比开始时增长 10 以上的概率.

参考文献

[1]Ross. S. M. (2010). A First Course in Probability，Prentice-Hall.

第3章 布朗运动与几何布朗运动

3.1 布朗运动

布朗运动是满足一定性质的随机变量集合 $X(t)$，$t\geqslant 0$，这些性质将在下面列举．可以将它理解为一个按时间堆积的过程．参数 t 表示时间，$X(t)$ 表示过程在 t 时刻的状态．下面是其具体定义．

定义 随机变量集合 $X(t)(t\geqslant 0)$ 称为一个漂移参数为 μ，方差参数为 σ^2 的布朗运动，如果下列假定成立：

a) $X(0)$ 是一个给定的常数．

b) 对所有正数 y 和 t，随机变量 $X(t+y)-X(y)$ 独立于到 y 为止的所有过程值，且它服从均值为 μt，方差为 $t\sigma^2$ 的正态分布．

假定 b) 表明过程从现在时刻 y 起经过时间 t 后，过程的改变是一个均值为 μt，方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量．任意将来值 $X(t+y)$ 等于现值 $X(y)$ 加上改变值 $X(t+y)-X(y)$，该假定表明正是过程的现值而不是任何过去值决定了过程将来值的概率．

布朗运动的一个重要性质是：$X(t)$ 以概率 1 是 t 的连续函数，虽然这是一个很深奥的数学结果，但不难看出它为什么是对的．为了证明 $X(t)$ 是连续的，只需证明

$$\lim_{h\to 0}(X(t+h)-X(t))=0.$$

因为随机变量 $X(t+h)-X(t)$ 的均值、方差分别为 μh 和 $h\sigma^2$，当 $h\to 0$ 时，它收敛于一个均值为 0，方差为 0 的随机变量，也就是说，它收敛于常数 0，这就证明了连续性．

尽管 $X(t)$ 以概率 1 是 t 的连续函数，但是它有一个令人惊诧的性质：它是处处不可微的．为了看出这一点，注意到 $\dfrac{X(t+h)-X(t)}{h}$ 的均值为 μ，方差为 σ^2/h，因为该比率的方差当 $h\to 0$ 时收敛于无穷，所以该比率不收敛就毫不奇怪了．

3.2 作为更简单模型极限的布朗运动

设 Δ 是一个很小的时间增量，考虑一个过程，使其在每个 Δ 时间长度上，该过程或以概率 p 增加 $\sigma\sqrt{\Delta}$，或以概率 $1-p$ 减少 $\sigma\sqrt{\Delta}$，其中

$$p=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right)$$

且该过程后面的改变值与前面的改变值是独立的．

前面已经假定了该过程值仅按 Δ 的整数倍时间变化，在每个变化点过程值增

加或减少的量为$\sigma\sqrt{\Delta}$，且过程值增加的概率为$p=\frac{1}{2}(1+\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta})$.

当取Δ越来越小时，改变变得越来越频繁(虽然变化量越来越小)，该过程就变成了一个漂移参数为μ，方差参数为σ^2的布朗运动. 因此布朗运动可由一个相对简单的过程近似，即可由一个在每一段固定的时间长度上以确定的总量增加或减少的过程近似.

下面证明当Δ变得越来越小时，前面的模型变成一个布朗运动. 首先，设

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{如果在时刻 } i\Delta \text{ 变化是增加}, \\ -1 & \text{如果在时刻 } i\Delta \text{ 变化是减少}, \end{cases}$$

因此，如果$X(0)$表示过程在时刻 0 的值，那么，在经过n次变化之后，过程值为

35

$$X(n\Delta) = X(0) + \sigma\sqrt{\Delta}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n).$$

因为在t时刻，共经过了$n=t/\Delta$次变化，所以

$$X(t) - X(0) = \sigma\sqrt{\Delta}\sum_{i=1}^{t/\Delta} X_i.$$

由于$X_i(i=1, \ldots, t/\Delta)$是相互独立的，当$\Delta$趋于 0 时，求和式$\sum_{i=1}^{t/\Delta} X_i$中有更多的项，中心极限定理告诉我们这个和收敛于一个正态随机变量. 所以当Δ趋于 0 时，这个过程在t时刻变成了一个正态随机变量. 为了计算其均值与方差，注意到

$$E[X_i] = 1(p) - 1(1-p) = 2p - 1 = \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta}$$

且

$$\mathrm{Var}(X_i) = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = 1 - (2p-1)^2,$$

因此

$$\begin{aligned} E[X(t) - X(0)] &= E\left[\sigma\sqrt{\Delta}\sum_{i=1}^{t/\Delta} X_i\right] \\ &= \sigma\sqrt{\Delta}\sum_{i=1}^{t/\Delta} E[X_i] \\ &= \sigma\sqrt{\Delta}\,\frac{t}{\Delta}\,\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta} \\ &= \mu t. \end{aligned}$$

进一步

$$\mathrm{Var}(X(t) - X(0)) = \mathrm{Var}\left(\sigma\sqrt{\Delta}\sum_{i=1}^{t/\Delta} X_i\right)$$

$$= \sigma^2 \Delta \sum_{i=1}^{t/\Delta} \operatorname{Var}(X_i) \qquad \text{(由独立性)}$$
$$= \sigma^2 t[1-(2p-1)^2].$$

因为当 $\Delta \to 0$ 时，$p \to 1/2$，由上式有

$$\operatorname{Var}(X(t)-X(0)) \to t\sigma^2, \quad \text{当} \Delta \to 0 \text{时},$$

36

所以当 Δ 变得越来越小时，$X(t)-X(0)$收敛于一个均值为 μt，方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量. 由于过程后面的改变与前面的改变是独立的，且每次改变是增加或减少的概率是相同的，所以得到 $X(t+y)-X(y)$与 $X(t)-X(0)$有相同的分布，且 $X(t+y)-X(y)$与 y 时刻之前的过程改变是独立的，因此，当 Δ 趋于 0 时，过程值在时间上的集合是一个漂移参数为 μ，方差参数为 σ^2 的布朗运动.

布朗运动的一个重要性质是在给定过程 t 时刻的值的条件下，过程到 t 时刻为止的所有值的联合分布不依赖于漂移参数的值，该结果利用近似过程是很容易证明的.

定理 3.2.1 *给定 $X(t)=x$，那么价格集合 $X(y)(0\leqslant y\leqslant t)$的条件概率分布与 μ 的取值无关.*

证明： 设 $s=X(0)$是 0 时刻的价格，考虑近似模型，其中价格是在 Δ 的整倍数时间上变化的，其每次改变量的绝对值相同，为 $c\equiv\sigma\sqrt{\Delta}$. 注意到 c 不依赖于 μ. 到 t 时刻，已经变化了 t/Δ 次，因此从时刻 0 到时刻 t，价格增加的量为$x-s$. 故在这 t/Δ 次改变中，有$\frac{t}{2\Delta}+\frac{x-s}{2c}$次正改变，有$\frac{t}{2\Delta}-\frac{x-s}{2c}$次负改变. (因为这样正改变比负改变多出$\frac{x-s}{c}$次，则价格将增加 $c\left(\frac{x-s}{c}\right)=x-s$.)由于每次改变都是独立的，正改变的概率为 p，因而在给定条件下，$\frac{t}{2\Delta}+\frac{x-s}{2c}$次正改变在$t/\Delta$次改变中出现的位置在所有可能情况中是等可能的. (这相当于，在抛硬币中，正面朝上的概率为 p，在 m 次试验中假定有 k 次正面朝上，那么这 k 次正面朝上共有$\binom{m}{k}$种可能，每种情况出现的概率是相同的.)因此，尽管 p 依赖于μ，但到 t 时刻为止的历史价格在 $X(t)=x$ 条件下的条件分布不依赖于μ. (但是由于与 c 有关，故它是依赖于 σ 的. 因为 $X(t)=x$，每次变化的大小依赖于 σ，所以当 σ 变化时，t/Δ 相应地改变.)

37

取 Δ 趋近于 0，则定理得证. □

布朗运动有着著名的科学背景，它是以英国植物学家罗伯特·布朗(Robert Brown)的名字命名的. 布朗在 1827 年首次描述了散布在液体或气体中微粒的不规则运动. 关于这种运动的解释在 1905 年由阿尔伯特·爱因斯坦(Albert Einstein)首次给出，他指出布朗运动在数学上可以通过假定散布的微粒连续不断

地受到周围大分子的碰撞来解释，而布朗运动简练的数学定义以及对它的某些数学性质的说明则是由美国应用数学家诺伯特·维纳(Norbert Wiener)在1918年发表的一系列文章中给出的.

有趣的是，1900年，法国数学家Bachelier也独立地介绍了布朗运动. 他在自己的博士论文中用此来建立股票和商品价格运动的模型. 但是，在用布朗运动建立的股票或商品价格模型中存在两个主要缺陷. 第一，既然股票价格是一个正态随机变量，则它在理论上可以取负值. 第二，在布朗运动的模型里，假定无论初始价格为何值，固定时间长度的价格差都具有相同的正态分布. 这个假设不是很合理. 例如，许多人可能不会认为股价一个月后从现价20美元降到15美元(下降了25%)的概率，与股价一个月后从现价10美元降到5美元(下降了50%)的概率相同.

实践中，对随时间变化的证券价格建模常采用几何布朗运动过程.

3.3 几何布朗运动

定义 *设 $X(t)(t\geqslant 0)$ 是一个漂移参数为 μ，方差参数为 σ^2 的布朗运动过程，又设*

$$S(t)=\mathrm{e}^{X(t)},t\geqslant 0,$$

则称过程 $S(t)(t\geqslant 0)$ 为一个漂移参数为 μ，方差参数为 σ^2 的几何布朗运动过程.

38

设 $S(t)(t\geqslant 0)$ 是一个漂移参数为 μ，方差参数为 σ^2 的几何布朗运动过程. 因为 $\log(S(t))(t\geqslant 0)$ 是一个布朗运动，且 $\log(S(t+y)-\log(S(y))=\log\left(\frac{S(t+y)}{S(y)}\right)$，所以由布朗运动的定义知：对任意正数 y 和 t，过程

$$\log\left(\frac{(S(t+y)}{S(y)}\right)$$

独立于 y 时刻为止的所有历史过程值，且它服从均值为 μt，方差为 $t\sigma^2$ 的正态分布.

当用来对随时间变化的证券价格建模时，几何布朗运动排除了布朗运动的所有缺陷. 由于假定股票价格的对数为正态随机变量(这样的模型确保了股票价格不会出现负数)，且假定相隔相同时间长度的股票价格的比率(而不是差)具有相同的分布，因此，很多人认为是价格变化的百分比的分布，而不是价格变化的绝对值的分布，与当前价格无关的几何布朗运动的假定是一个更合理的假定.

注

- *当几何布朗运动用来对随时间变化的证券价格建模时，通常称 σ 为波动率参数.*

- 如果 $S(0)=s$，那么有下列表达式

$$S(t) = se^{X(t)}, t \geqslant 0,$$

其中 $X(t)(t\geqslant 0)$是满足 $X(0)=0$ 的布朗运动过程.

- 如果 X 是一个正态随机过程，可以证明

$$E[e^X] = \exp\{E[X] + \mathrm{Var}(X)/2\}.$$

因此，如果 $S(t)(t\geqslant 0)$是一个漂移为 μ，波动为 σ 的几何布朗运动，且 $S(0)=s$，那么

$$E[S(t)] = se^{\mu t + t\sigma^2/2} = se^{(\mu+\sigma^2/2)t}.$$

因此，在几何布朗运动的假定下，证券价格预期以 $\mu+\sigma^2/2$ 的增长率增长. 通常称 $\mu+\sigma^2/2$ 为几何布朗运动的增长率，所以一个增长率参数为 μ_r，波动为 σ 的几何布朗运动，其漂移参数为 $\mu_r-\sigma^2/2$. 39

作为更简单模型极限的几何布朗运动

设 $S(t)(t\geqslant 0)$是一个漂移参数为 μ，波动参数为 σ 的几何布朗运动. 因为 $X(t)=\log(S(t))(t\geqslant 0)$是一个布朗运动，所以可以由布朗运动的近似过程得到几何布朗运动的近似过程. 由 $\frac{S(y+\Delta)}{S(y)}=e^{X(y+\Delta)-X(y)}$，有

$$S(y+\Delta) = S(y)e^{X(y+\Delta)-X(y)}.$$

因此，几何布朗运动可由一个证券价格模型来近似，其中证券价格变化仅发生在 Δ 的整数倍时刻，且变化只有两种可能：或以概率 p 上涨 u 倍，或以概率 $1-p$ 下降 d 倍，其中

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}$$

且

$$p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right).$$

当 Δ 趋近于 0 时，上面的模型就变成一个几何布朗运动. 所以，几何布朗运动可以用一个在固定时间上升或下降固定倍数的相对简单过程来近似.

*3.4 最大变量

设 $X(v)(v\geqslant 0)$是一个漂移参数为 μ，方差参数为 σ^2 的布朗运动. 假定 $X(0)=0$，则该过程始于状态 0. 定义

$$M(t) = \max_{0\leqslant v\leqslant t} X(v)$$

是布朗运动到 t 时刻为止的最大值. 在本节里，将首先给出在 $X(t)$的值已知的条件下 $M(t)$的条件分布，然后利用这一结果得出 $M(t)$的无条件分布. 40

定理 3.4.1 对任意 $y>x$，

$$P(M(t)\geqslant y|X(t)=x)=\mathrm{e}^{-2y(y-x)/t\sigma^2},y\geqslant 0.$$

证明： 由 $X(0)=0$ 知 $M(t)\geqslant 0$，所以当 $y=0$ 时结论成立(此时等式两边均为1). 以下假定 $y>0$. 首先，由定理 3.1.1 知 $P(M(t)\geqslant y|X(t)=x)$ 不依赖于 μ 的值，所以不妨假设 $\mu=0$. 用 T_y 表示布朗运动首达 y 的时间，由布朗运动的连续性知事件 $M(t)\geqslant y$ 等价于事件 $T_y\leqslant t$(由连续性知过程要超过正数值 y，必须要先达到 y). 设 h 是满足 $y>x+h$ 的一个很小的正数. 那么

$$\begin{aligned}&P(M(t)\geqslant y,x\leqslant X(t)\leqslant x+h)\\=&P(T_y\leqslant t,x\leqslant X(t)\leqslant x+h)\\=&P(x\leqslant X(t)\leqslant x+h|T_y\leqslant t)P(T_y\leqslant t).\end{aligned}\tag{3-1}$$

现给定 $T_y\leqslant t$，如果过程到达 y 后，增加的量 $X(t)-X(T_y)=X(t)-y$，即过程从 y 经过 t 时间后改变的量介于 $x-y$ 与 $x+h-y$ 之间，那么事件 $x\leqslant X(t)\leqslant x+h$ 将发生. 由于增量的分布关于 0 对称(由 $\mu=0$ 及正态随机变量关于均值对称)，从而增量介于 $-(x+h-y)$ 与 $-(x-y)$ 之间和介于 $x-y$ 与 $x+h-y$ 之间是等可能的. 所以

$$\begin{aligned}&P(x\leqslant X(t)\leqslant x+h|T_y\leqslant t)\\=&P(x-y\leqslant X(t)-y\leqslant x+h-y|T_y\leqslant t)\\=&P(-(x+h-y)\leqslant X(t)-y\leqslant -(x-y)|T_y\leqslant t).\end{aligned}$$

由上式及(3-1)式得到

$$\begin{aligned}&P(M(t)\geqslant y,x\leqslant X(t)\leqslant x+h)\\=&P(2y-x-h\leqslant X(t)\leqslant 2y-x|T_y\leqslant t)P(T_y\leqslant t)\\=&P(2y-x-h\leqslant X(t)\leqslant 2y-x,T_y\leqslant t)\\=&P(2y-x-h\leqslant X(t)\leqslant 2y-x).\end{aligned}$$

41

最后一行是因为由假设 $y>x+h$，从而有 $2y-x-h>y$，由布朗运动的连续性知事件 $2y-x-h\leqslant X(t)$ 蕴涵事件 $T_y\leqslant t$. 于是有

$$\begin{aligned}P(M(t)\geqslant y|x\leqslant X(t)\leqslant x+h)&=\frac{P(2y-x-h\leqslant X(t)\leqslant 2y-x)}{P(x\leqslant X(t)\leqslant x+h)}\\&\approx\frac{f_{X(t)}(2y-x)h}{f_{X(t)}(x)h}\end{aligned}$$

对充分小的 h 成立，其中 $f_{X(t)}$ 是一个均值为 0，方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量的密度函数. 令 $h\to 0$，则得到

$$\begin{aligned}P(M(t)\geqslant y|X(t)=x)&=\frac{f_{X(t)}(2y-x)}{f_{X(t)}(x)}\\&=\frac{\mathrm{e}^{-(2y-x)^2/2t\sigma^2}}{\mathrm{e}^{-x^2/2t\sigma^2}}\end{aligned}$$

$$= e^{-2y(y-x)/t\sigma^2}.$$

用 Z 表示一个标准的正态分布的随机变量，设

$$\overline{\Phi} = 1 - \Phi(x) = P(Z > x),$$

则有以下结论.

推论 3.4.1 对 $y \geqslant 0$，

$$P(M(t) \geqslant y) = e^{2y\mu/\sigma^2}\, \overline{\Phi}\left(\frac{\mu t + y}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \overline{\Phi}\left(\frac{y - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

证明： 在给定 $X(t)$ 条件下，由定理 3.4.1，有

$$\begin{aligned}
&P(M(t) \geqslant y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P(M(t) \geqslant y \mid X(t) = x) f_{X(t)}(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{y} P(M(t) \geqslant y \mid X(t) = x) f_{X(t)}(x)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{y}^{\infty} P(M(t) \geqslant y \mid X(t) = x) f_{X(t)}(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{y} e^{-2y(y-x)/t\sigma^2} f_{X(t)}(x)\mathrm{d}x + \int_{y}^{\infty} f_{X(t)}(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

42

$f_{X(t)}$ 是一个均值为 μt，方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量的密度函数，化简上式的右边得到推论的证明：

$$\begin{aligned}
&P(M(t) \geqslant y) \\
&= \int_{-\infty}^{y} e^{-2y(y-x)/t\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}} e^{-(x-\mu t)^2/2t\sigma^2}\mathrm{d}x + P(X(t) > y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} e^{-2y^2/t\sigma^2} e^{-\mu^2 t^2/2t\sigma^2} \int_{-\infty}^{y} \exp\left\{-\frac{1}{2t\sigma^2}(x^2 - 2\mu t x - 4yx)\right\}\mathrm{d}x + P(X(t) > y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} e^{-(4y^2+\mu^2 t^2)/2t\sigma^2} \int_{-\infty}^{y} \exp\left\{-\frac{1}{2t\sigma^2}(x^2 - 2x(\mu t + 2y))\right\}\mathrm{d}x + P(X(t) > y).
\end{aligned}$$

因为

$$x^2 - 2x(\mu t + 2y) = (x - (\mu t + 2y))^2 - (\mu t + 2y)^2,$$

所以

$$\begin{aligned}
P(M(t) \geqslant y) &= e^{-(4y^2+\mu^2 t^2-(\mu t+2y)^2)/2t\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{y} e^{-(x-\mu t-2y)^2/2t\sigma^2}\mathrm{d}x + P(X(t) > y).
\end{aligned}$$

设 Z 是一个标准正态分布的随机变量，作变量代换

$$w = \frac{x - \mu t - 2y}{\sigma\sqrt{t}}, \mathrm{d}x = \sigma\sqrt{t}\,\mathrm{d}w,$$

则

$$P(M(t)\geqslant y)=e^{2y\mu/\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{-\mu t-y}{\sigma\sqrt{t}}}e^{-w^2/2}dw+P\left(\frac{X(t)-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}>\frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

$$=e^{2y\mu/\sigma^2}P\left(Z<\frac{-\mu t-y}{\sigma\sqrt{t}}\right)+P\left(Z>\frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

43

$$=e^{2y\mu/\sigma^2}P\left(Z>\frac{\mu t+y}{\sigma\sqrt{t}}\right)+P\left(Z>\frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

结论得证. □

在定理 3.4.1 的证明过程中，使用了 T_y 表示布朗运动首达 y 的时刻，即

$$T_y=\begin{cases}\infty & \text{对所有 } t\geqslant 0, X(t)\neq y,\\ \min(t:X(t)=y) & \text{否则.}\end{cases}$$

正如前面已经说明过的，布朗运动是路径连续的，对 $y>0$，过程在 t 时刻之前首达 y 当且仅当过程在 t 时刻为止的最大值至少是 y，即

$$T_y\leqslant t\Leftrightarrow M(t)\geqslant y.$$

因此，由推论 3.4.1 有

$$P(T_y\leqslant t)=e^{2y\mu/\sigma^2}\,\overline{\Phi}\left(\frac{y+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)+\overline{\Phi}\left(\frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

如果用 $M_{\mu,\sigma}(t)$表示漂移参数为 μ，方差参数为 σ^2，且始于 0 的布朗运动到 t 时刻为止的最大随机变量，则 $M_{\mu,\sigma}(t)$的分布可由推论 3.4.1 得到．下面考虑

$$M^*(t)=\min_{0\leqslant v\leqslant t}X(v)$$

的分布．由$-X(v)(v\geqslant 0)$是漂移参数为$-\mu$，方差参数为 σ^2 的布朗运动过程，所以对 $y>0$ 有

$$P(M^*(t)\leqslant -y)=P(\min_{0\leqslant v\leqslant t}X(v)\leqslant -y)$$

$$=P(-\max_{0\leqslant v\leqslant t}-X(v)\leqslant -y)$$

$$=P(-\max_{0\leqslant v\leqslant t}-X(v)\geqslant y)$$

$$=P(M_{-\mu,\sigma}(t)\geqslant y)$$

$$=e^{-2y\mu/\sigma^2}\,\overline{\Phi}\left(\frac{-\mu t+y}{\sigma\sqrt{t}}\right)+\overline{\Phi}\left(\frac{y+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

44 其中最后一个等式用到了推论 3.4.1.

3.5 Gameron-Martin 定理

对一个方差参数为 σ^2 的布朗运动，用 E_μ 表示漂移参数为 μ 时的期望，比如 E_0 表示漂移参数为 0 时的期望．下列定理称为 Gameron-Martin 定理．（它是一

个更一般的结果——Girsanov 定理的特殊情况.)

定理 3.5.1 设 W 是一个随机变量，它的值由到 t 时刻为止的布朗运动的历史值所确定. 也就是说，在 $X(s)(0\leqslant s\leqslant t)$ 已知条件下，W 是一个非随机的量，那么

$$E_\mu[W] = e^{-\mu^2 t/2\sigma^2} E_0[W e^{\mu X(t)/\sigma^2}].$$

证明：因为 $X(t)$ 是均值为 μt，方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量，所以在 $X(t)$ 条件下有

$$\begin{aligned} E_\mu[W] &= \int_{-\infty}^{\infty} E_\mu[W \mid X(t) = x] \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}} e^{-(x-\mu t)^2/2t\sigma^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E_0[W \mid X(t) = x] \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}} e^{-(x-\mu t)^2/2t\sigma^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E_0[W \mid X(t) = x] \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}} e^{-x^2/2t\sigma^2} e^{(2\mu x-\mu^2 t)/2\sigma^2} dx. \end{aligned} \tag{3-2}$$

其中，第二个等式用到定理 3.1.1，即在 $X(t)=x$ 条件下，过程到 t 时刻为止的历史值的条件分布与 μ 的取值无关(W 的条件分布也如此). 现定义

$$Y = e^{-\mu^2 t/2\sigma^2} e^{\mu X(t)/\sigma^2} = e^{(2\mu X(t)-\mu^2 t)/2\sigma^2},$$

那么

$$E_0[WY] = \int_{-\infty}^{\infty} E_0[WY \mid X(t) = x] \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}} e^{x^2/2t\sigma^2} dx.$$

45

但是，在给定了 $X(t)=x$ 条件下，随机变量 Y 等于常数 $e^{(2\mu x-\mu^2 t)/2\sigma^2}$，所以由上式得到

$$\begin{aligned} E_0[WY] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\mu x-\mu^2 t)/2\sigma^2} E_0[W \mid X(t) = x] \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}} e^{-x^2/2t\sigma^2} dx \\ &= E_\mu[W], \end{aligned}$$

其中最后一个等式用到了(3-2)式.

3.6 习题

练习 3.1 设 $X(t)(t\geqslant 0)$ 是一个漂移参数为 μ，方差参数为 σ^2 的布朗运动，且 $X(0)=0$. 求证 $-X(t)(t\geqslant 0)$ 是一个漂移参数为 $-\mu$，方差参数为 σ^2 的布朗运动.

练习 3.2 设 $X(t)(t\geqslant 0)$ 是一个漂移参数为 $\mu=3$，方差参数为 $\sigma^2=9$ 的布朗运动，且 $X(0)=10$. 求

a) $E[X(2)]$；

b) $\mathrm{Var}(X(2))$；

c) $P(X(2)>20)$；

d) $P(X(0.5)>10)$.

练习 3.3 在上题的布朗运动近似模型中，设 $\Delta=0.1$. 对该近似模型，求：

a) $E[X(1)]$；

b) $\mathrm{Var}(X(1))$；

c) $P(X(0.5)>10)$.

练习 3.4 设 $S(t)(t\geqslant 0)$是漂移参数为 $\mu=0.1$，波动参数为 $\sigma=0.2$ 的几何布朗运动，求：

a) $P(S(1)>S(0))$；

b) $P(S(2)>S(1)>S(0))$；

c) $P(S(3)<S(1)>S(0))$.

练习 3.5 将练习 3.4 中的波动参数值改为 0.4，其他条件和要求不变. 求 [46] 上述三式的值.

练习 3.6 设 $S(t)(t\geqslant 0)$是漂移参数为 μ，波动参数为 σ 的几何布朗运动，假定 $S(0)=s$，求 $\mathrm{Var}(S(t))$. 提示：利用以下恒等式：

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2]-(E[X])^2.$$

练习 3.7 设$\{X(t),\ t\geqslant 0\}$是一漂移参数为 μ，方差参数为 σ^2 的布朗运动，且 $X(0)=0$. 用 T_y 表示该过程首达 y 的时间，设 $y>0$. 求证

$$P(T_y<\infty)=\begin{cases}1, & \mu\geqslant 0\\ e^{2y\mu/\sigma^2}, & \mu<0\end{cases}$$

设 $M=\max\limits_{0<t<\infty}X(t)$是该过程的最大值，求证：当 $\mu<0$ 时，M 服从比率为 $-2\mu/\sigma^2$ 的指数分布.

练习 3.8 设 $S(v)(v\geqslant 0)$是漂移参数为 μ，波动参数为 σ 的几何布朗运动，假定 $S(0)=s$，求 $P(\max\limits_{0\leqslant v\leqslant t}S(v)\geqslant y)$.

练习 3.9 设 $S(v)(v\geqslant 0)$是漂移参数为 0.1，波动参数为 0.3 的几何布朗运动，求

[47]

$$P(\max_{0\leqslant v\leqslant 1}S(v)<1.2S(0)).$$

第4章　利率和现值分析

4.1　利率

如果借了总额为 P 的一笔款项(称之为本金)，该款项在时间 T 后偿还，并在届时以单利方式按每 T 个单位时间 r 的利率支付利息，那么在 T 时刻需要偿还的总金额是

$$P + rP = P(1 + r).$$

这就是说，必须同时偿还本金 P 和利息，利息等于本金乘以利率. 例如，如果以 5%的年利率按单利(即 $r=0.05$)借款 100 美元，并在一年后偿还，则在这一年年末需要偿还 105 美元.

例 4.1a　设借款金额为 P，年利率为 r，以半年计息一次的复利方式支付利息，并且要在一年后偿还本金. 这意味着什么？一年后欠了多少钱？

解：以半年计息一次的复利形式支付利息意味着半年后会以每半年 $r/2$ 的利率以单利形式计算一次利息，这个利息随后被加入到原有的本金中. 在下一个半年后，这个新的本金又以每半年 $r/2$ 的利率再计算一次利息. 换句话说，六个月后的欠款为

$$P(1 + r/2).$$

它被视为以利率 $r/2$ 的六个月期贷款的新的本金；因此，在这一年的年末，债务将为

$$P(1 + r/2)(1 + r/2) = P(1 + r/2)^2. \qquad \square$$

例 4.1b　如果借款 1 000 美元，年利率为 8%，按每季度计息一次的复利形式支付利息，借期为一年. 那么一年后欠了多少钱？

解：每季度计息一次的 8%的年复利利率，等价于每个季度以 2%的单利利率支付一次利息，而在计算每个季度的利息时，不仅要考虑原有的本金，而且还要加上累积到该时刻的利息. 因此，一个季度后的欠款为

$$1\,000(1 + 0.02);$$

两个季度后的欠款为

$$1\,000(1 + 0.02)(1 + 0.02) = 1\,000(1 + 0.02)^2;$$

三个季度后的欠款为

$$1\,000(1 + 0.02)^2(1 + 0.02) = 1\,000(1 + 0.02)^3;$$

四个季度后的欠款为

$$1\,000(1+0.02)^3(1+0.02)=1\,000(1+0.02)^4=1\,082.40.$$ □

例 4.1c 许多信用卡公司均是按每月计息一次的18%的年复利利率计算利息的. 如果在一年的年初支付金额为 P，而在这一年中并没有发生支付，那么在这一年的年末欠款将是多少?

解: 这样的复利利率相当于每个月以月利率 18/12%=1.5%支付利息，而累计的利息将加到下一个月所欠的本金中. 因此，一年后你的欠款为

$$P(1+0.015)^{12}=1.195\,6P.$$ □

正如在例4.1b和例4.1c中所看到的，如果利率 r 是复利利率，那么实际支付的利息总额要比以单利利率 r 支付的多. 这是因为在复利利息的计算中，对前面已经计算过的利息又收取了利息. 在此情形下，称 r 为*名义利率*(nominal interest rate)，并通过下式定义*有效利率*(effective interest rate)r_{eff}:

[49]

$$r_{eff}=\frac{\text{在一年末偿还的本息和}-P}{P}.$$

例如，如果名义利率为 r 的一年期贷款每季度计息一次，则这一年的有效利率为

$$r_{eff}=(1+r/4)^4-1.$$

因此，例4.1b中的有效利率为8.24%，而例4.1c中的有效利率为19.56%. 因为

$$P(1+r_{eff})=\text{在一年末偿还的本息和},$$

所以对一年期贷款，以复利计算的本息额与每年以单利利率 r_{eff} 计算的本息额是相等的.

例 4.1d(*加倍法则*) 如果将资金投入到一个以每年计息一次，复利利率为 r 的账户中，那么多少年之后资金将变成原来的两倍?

解: 由于初始存款 D 在 n 年后的价值为 $D(1+r)^n$，因此需要找到 n 以使得下式成立:

$$(1+r)^n=2.$$

而

$$\begin{aligned}(1+r)^n&=\left(1+\frac{nr}{n}\right)^n\\&\approx e^{nr},\end{aligned}$$

只要 n 不是很小，这里的近似是相当精确的.
因此

$$e^{nr}\approx 2,$$

这意味着

$$n \approx \frac{\log(2)}{r} = \frac{0.693}{r}.$$

于是要使 n 年后资金翻番，只要

$$n \approx \frac{0.7}{r}.$$

例如，如果利率为 1%（$r=0.01$），那么大约 70 年后资金将会翻番；如果 $r=0.02$，那么需要 35 年；如果 $r=0.03$，将需要 $23\frac{1}{3}$年；如果 $r=0.05$，将需要大约 14 年；如果 $r=0.07$，将需要大约 10 年；而如果 $r=0.10$，将需要大约 7 年.

50

为检验上面的近似计算，给出以下数据(精确到小数点后三位)：

$$(1.01)^{70} = 2.007,$$
$$(1.02)^{35} = 2.000,$$
$$(1.03)^{23.33} = 1.993,$$
$$(1.05)^{14} = 1.980,$$
$$(1.07)^{10} = 1.967,$$
$$(1.10)^{7} = 1.949.$$

□

现在假设借款的本金为 P，借期一年，并以年名义利率 r 连续地计算利息. 那么在一年末的欠款将为多少？为了回答这个问题，必须首先对"连续地"计息给出明确的定义. 注意到，如果贷款在一年中是以 n 个相等的时间间隔按复利方式计算利息，则在这一年的年末，本息和将为：$P(1+r/n)^n$. 因此当 n 变得越来越大时，取这个变化过程的极限作为连续复利是合理的. 在时刻 1 的本息和应该为：

$$P\lim_{n\to\infty}(1+r/n)^n = Pe^r.$$

例 4.1e 如果一家银行所提供的利息是以名义利率 5%连续地计算利息，那么每年的有效利率应该是多少？

解：有效利率应为

$$r_{\text{eff}} = \frac{Pe^{0.05} - P}{P} = e^{0.05} - 1 \approx 0.051\,27.$$

即有效利率是每年 5.127%.

□

如果借款金额为 P，借期 t 年，并以年名义利率 r 连续地支付利息，那么在时刻 t 的本息和为 Pe^{rt}. 这是因为，如果在一年中计息 n 次，那么到时刻 t 将一共计息 nt 次，届时的债务水平为 $P(1+r/n)^{nt}$. 因此，在连续计息的情况下，在 t 时刻的债务应该为

51

$$P\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=P\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}\right)^{t}$$
$$=Pe^{rt}.$$

从前面的解释可以看出，按每单位时间 r 计算的连续复利，可以解释成以每 t 个单位时间名义利率 rt 计算的连续复利.

4.2 现值分析

假设可以按每期计息一次的方式，以每期 r 的名义利率借款和贷款. 在此条件下，第 i 期的期末支付 v 美元的当前价值是多少呢? 由于金额为 $v(1+r)^{-i}$ 的银行贷款在第 i 期需要偿还金额 v，因此在第 i 期支付 v 金额的现值是 $v(1+r)^{-i}$.

利用现值可以比较不同的收入流，以决定哪一个更可取.

例 4.2a 假设在今后五年的每年年末，将收到一笔钱(以千美元为单位). 以下三个支付序列哪一个更可取?

A. 12，14，16，18，20;

B. 16，16，15，15，15;

C. 20，16，14，12，10.

解: 如果名义利率为 r，每年计息一次，则支付序列 $x_i(i=1，2，3，4，5)$ 的现值为

$$\sum_{i=1}^{5}(1+r)^{-i}x_i;$$

具有最大现值的支付序列是最可取的. 从中可以看出，支付序列的优劣是依赖于利率的.

52

如果 r 很小，那么序列 A 是最好的，因为它的支付总额最大. 对稍大一些的 r，序列 B 可能是最好的. 这是因为，虽然它的支付总额(77)比序列 A 的支付总额(80)小，但是 B 序列前期的几次支付额都大于 A 同期的支付额. 对于一个更大一些的 r，序列 C 就可能是最好的了. 它的前几期支付额比 A 和 B 同期的都大. 表 4-1 给出了在三个不同的 r 值下，这三个支付序列所对应的现值.

表 4-1 现值

r	支付序列		
	A	B	C
0.1	59.21	58.60	56.33
0.2	45.70	46.39	45.69
0.3	36.49	37.89	38.12

需要指出的是，可以在任何特定的时刻比较现金流的价值. 例如，要比较它们在第五年末的价值，则需要决定在下式中哪一个支付序列可以得到最大的

价值：

$$\sum_{i=1}^{5}(1+r)^{5-i}x_i=(1+r)^5\sum_{i=1}^{5}(1+r)^{-i}x_i.$$

因此若按利率进行排序，就得到与前面分析相同的结果. □

注 给定利率 r，每年计息一次. 任意给定一个现金流 $a=a_1, a_2, \cdots, a_n$，把它想象成在第 i 年($i=1, \cdots, n$)年末支付 a_i 美元的回报. 这样的现金流可按下述方法予以复制：0 时刻在银行存入

$$\mathrm{PV}(a)=\frac{a_1}{1+r}+\frac{a_2}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{a_n}{(1+r)^n}$$

并分别在每年末相继提款 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 为了验证这种说法，注意到如果在第一年的年末提款 a_1，那么账户中还剩下

53

$$(1+r)\left[\frac{a_1}{1+r}+\frac{a_2}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{a_n}{(1+r)^n}\right]-a_1$$

$$=\frac{a_2}{(1+r)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+r)^{n-1}}.$$

在第二年年末提款 a_2 后，账户中还有

$$(1+r)\left[\frac{a_2}{1+r}+\cdots+\frac{a_n}{(1+r)^{n-1}}\right]-a_2$$

$$=\frac{a_3}{(1+r)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+r)^{n-2}}.$$

继续这种操作，那么在第 $i(i<n)$ 年的年末提款 a_i 后，账户中的剩余金额为

$$\frac{a_{i+1}}{(1+r)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+r)^{n-i}}.$$

因此，将 a_{n-1} 也提出后，账户中的金额为 $a_n/(1+r)$，这正好使下一年的年末可提款 a_n.

类似地，现金流序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 可以通过以下方式转换成初始资本 $\mathrm{PV}(a)$：从银行借出此数量的资金，然后利用上述现金流来偿还该债务. 因此，任何现金流序列都等价于现金流序列的现值. 这就说明两个现金流中具有较大现值的现金流是更可取的. □

例 4.2b 一家公司在未来的五年中需要一种特定型号的机器. 这家公司当前有一台这种机器，价值 6 000 美元，未来三年内每年折旧 2 000 美元，在第三年年末报废. 该机器开始使用后第一年运转费用在该年年初值为 9 000 美元，之后在此基础上每年增加 2 000 美元. 在每年的年初可以按固定价格 22 000 美元购买一台新机器. 一台新机器的寿命是六年，在最初使用的两年中每年折旧 3 000

[54] 美元，之后每年折旧 4 000 美元．新机器在第一年的运转成本是 6 000 美元，在随后的每年中将增加 1 000 美元．如果利率为 10%，公司应在何时购买新机器？

解：这家公司可以在第 1、2、3、4 年的年初购买新机器，其对应的六年现金流如下(以 1 000 美元为单位)：

- 在第一年的年初购买新机器：22，7，8，9，10，−4；
- 在第二年的年初购买新机器：9，24，7，8，9，−8；
- 在第三年的年初购买新机器：9，11，26，7，8，−12；
- 在第四年的年初购买新机器：9，11，13，28，7，−16.

为了验证上面所列现金流的正确性，假设公司将在第三年的年初购买新机器，则公司在第一年的成本为旧机器 9 000 美元的运转成本；在第二年的成本为旧机器 11 000 美元的运转成本；在第三年的成本为新机器 22 000 的购买成本，加上 6 000 美元的运转成本，再减去从替换机器中得到的 2 000 美元；在第四年的成本是 7 000 美元的运转成本；在第五年的成本是 8 000 美元的运转成本；在第六年的成本是−12 000 美元，它是已经使用了三年的机器价值的负值．其他的三个现金流序列可以通过相似的方法推得．

对于年利率 $r=0.10$，第一个现金流序列的现值为

$$22+\frac{7}{1.1}+\frac{8}{(1.1)^2}+\frac{9}{(1.1)^3}+\frac{10}{(1.1)^4}-\frac{4}{(1.1)^5}=46.083.$$

其他现金流的现值可用同样的方法计算出．这四个现金流的现值分别是

46.083，43.794，43.760，45.627.

因此，公司应在两年后购买新机器． □

例 4.2c 一个打算在 20 年后退休的人，决定在今后 240 个月的每月月初在银行存款 A，使得他可以在随后的 360 个月的每月月初提款 1 000 美元．假设每 [55] 月计息一次的名义年利率为 6%，那么 A 的值应该为多少？

解：月利率为 $r=0.06/12=0.005$．令 $\beta=\frac{1}{1+r}$，他所有存款的现值为

$$A+A\beta+A\beta^2+\cdots+A\beta^{239}=A\frac{1-\beta^{240}}{1-\beta}.$$

类似地，如果 W 是在随后的 360 个月中每月的提款额，那么所有的提款额的现值为

$$W\beta^{240}+W\beta^{241}+\cdots+W\beta^{599}=W\beta^{240}\frac{1-\beta^{360}}{1-\beta}.$$

如果满足以下等式，他就可以实现所有的提款(同时他的账户中也不再有任何钱)：

$$A\frac{1-\beta^{240}}{1-\beta}=W\beta^{240}\frac{1-\beta^{360}}{1-\beta}.$$

对于$W=1\ 000$，$\beta=1/1.005$，可以得到

$$A=360.99.$$

所以，在240个月中每月存款361美元，就可以在随后的360个月中每月提取1 000美元.

注 在这个例子中，使用了以下的代数恒等式：

$$1+b+b^2+\cdots+b^n=\frac{1-b^{n+1}}{1-b}.$$

为了证明这个等式，令

$$x=1+b+b^2+\cdots+b^n,$$

注意到

$$\begin{aligned}x-1&=b+b^2+\cdots+b^n\\&=b(1+b+\cdots+b^{n-1})\\&=b(x-b^n).\end{aligned}$$

因此，

$$(1-b)x=1-b^{n+1},$$

这就证明了该等式.

56

令n趋向于无穷，可以得到当$|b|<1$时有

$$1+b+b^2+\cdots=\frac{1}{1-b}.$$

□

例 4.2d 终身年金给其持有者在未来每一年年末领取数额c的权利. 这就是说，对于每一个$i=1, 2, \cdots$，在第i年的年末要向持有者支付c. 如果利率为r，每年计息一次，那么这个现金流序列的现值是多少?

解：该现金流可以被复制为初始时刻在银行存入本金c/r，并在每一年的年末提取所得的利息(保留本金不动)，但是在初始阶段存入任何少于c/r的金额都无法复制这个现金流，因此这个无限期现金流的现值为c/r. 这个结论可以由下式推得：

$$\begin{aligned}\mathrm{PV}&=\frac{c}{1+r}+\frac{c}{(1+r)^2}+\frac{c}{(1+r)^3}+\cdots\\&=\frac{c}{1+r}\left[1+\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}+\cdots\right]\\&=\frac{c}{1+r}\frac{1}{1-\frac{1}{1+r}}\end{aligned}$$

$$= \frac{c}{r}. \qquad \square$$

例 4.2e 假设向银行借款 100 000 美元买房，负责贷款的经理说可以以 0.6%的月利率贷款 15 年，分期每月偿还．如果银行要收取贷款初始费用 600 美元，房屋检验费 400 美元，以及贷款额的一个百分点，那么银行提供的贷款的实际年利率是多少？

解：首先考虑这个贷款的每月还款额，记之为 A．由于 100 000 美元的贷款需要在未来的 180 个月中以月利率 0.6%偿还，所以

57

$$A[\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{180}] = 100\ 000,$$

其中 $\alpha=1/1.006$．因此，

$$A = \frac{100\ 000(1-\alpha)}{\alpha(1-\alpha^{180})} = 910.05.$$

因此如果实际得到了 100 000 美元，在 180 个月中每月偿还 910.05 美元，那么实际月利率应该是 0.6%．但是考虑到银行收取的初始贷款费用、房屋检验费以及一个百分点的贷款额（这意味着收到贷款时，银行将收取名义贷款额 100 000 美元的 1%），你实际只得到了 98 000 美元．因此有效月利率是满足下式的 r 的值：

$$A[\beta + \beta^2 + \cdots + \beta^{180}] = 98\ 000,$$

其中 $\beta=(1+r)^{-1}$．因此，

$$\frac{\beta(1-\beta^{180})}{1-\beta} = 107.69,$$

或者，由 $\frac{1-\beta}{\beta}=r$ 得

$$\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^{180}}{r} = 107.69.$$

利用试验误差法求上面方程的数值解（由于 $r>0.006$，很容易计算）得出：

$$r = 0.006\ 27.$$

因为 $(1+0.006\ 27)^{12}=1.077\ 9$，所以 0.6%的名义月利率对应的有效年利率约为 7.8%． $\square$

例 4.2f 假设一个人抵押贷款的金额为 L，需要在今后 n 个月的每月月末偿还等额 A．贷款的月利率是 r，每月计息一次．

a)已知 L，n，r，那么 A 的值是多少？

58

b)在第 j 月的月末支付已经完成后，还剩下多少贷款的本金？

c)在第 j 月的支付中，多少是利息的支付，多少是本金的扣除？（这很重要，

因为有些合同允许贷款提前偿还，偿还的利息部分是可减免税的.)

解：n 个月支付的现值为

$$\frac{A}{1+r}+\frac{A}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{A}{(1+r)^n}=\frac{A}{1+r}\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1-\frac{1}{1+r}}$$

$$=\frac{A}{r}[1-(1+r)^{-n}].$$

因为这必须等于贷款额 L，我们可以看出，

$$A=\frac{Lr}{1-(1+r)^{-n}}=\frac{L(\alpha-1)\alpha^n}{\alpha^n-1}, \tag{4-1}$$

其中，

$$\alpha=1+r.$$

例如，贷款 100 000 美元，需要以每月计息一次的名义年利率 0.09 在 360 个月中偿还，那么 $r=0.09/12=0.0075$，每月支付(以美元计)为

$$A=\frac{100\,000(0.0075)(1.0075)^{360}}{(1.0075)^{360}-1}=804.62.$$

令 R_j 表示在第 j($j=0$，…，n)月月末支付完当月偿还额后还欠的本金总额. 为了确定这几个量，注意到，如果在第 j 月的月末欠款为 R_j，那么在第 $j+1$ 月月末未发生支付前的欠款应该是$(1+r)R_j$. 由于每个月末的支付额为 A，所以有

$$R_{j+1}=(1+r)R_j-A=\alpha R_j-A.$$

从 $R_0=L$ 开始，我们得到：

$$\begin{aligned}R_1&=\alpha L-A;\\R_2&=\alpha R_1-A\\&=\alpha(\alpha L-A)-A\\&=\alpha^2L-(1+\alpha)A;\\R_3&=\alpha R_2-A\\&=\alpha(\alpha^2L-(1+\alpha)A)-A\\&=\alpha^3L-(1+\alpha+\alpha^2)A.\end{aligned}$$

59

一般地，对于 $j=0$，…，n，有

$$\begin{aligned}R_j&=\alpha^jL-A(1+\alpha+\cdots+\alpha^{j-1})\\&=\alpha^jL-A\frac{\alpha^j-1}{\alpha-1}\\&=\alpha^jL-\frac{L\alpha^n(\alpha^j-1)}{\alpha^n-1}\quad\text{（由等式(4-1)）}\end{aligned}$$

$$= \frac{L(\alpha^n - \alpha^j)}{\alpha^n - 1}.$$

令 I_j 和 P_j 分别表示在第 j 月月末支付的利息和本金的扣除额. 由于 R_{j-1} 是到上一个月月末的欠款额，因此有

$$\begin{aligned} I_j &= rR_{j-1} \\ &= \frac{L(\alpha-1)(\alpha^n - \alpha^{j-1})}{\alpha^n - 1} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} P_j &= A - I_j \\ &= \frac{L(\alpha-1)}{\alpha^n - 1}[\alpha^n - (\alpha^n - \alpha^{j-1})] \\ &= \frac{L(\alpha-1)\alpha^{j-1}}{\alpha^n - 1}. \end{aligned}$$

可以用下面的式子验证上面的结果：

$$\sum_{j=1}^{n} P_j = L.$$

我们发现，相邻月间返还的本金额以倍数 $\alpha = 1 + r$ 增长. 例如，在一个期限 60 为 30 年、利率是每月计息一次的 9%的年名义利率、本金为 100 000 美元的贷款中，第一个月支付的 804.62 美元中只有 54.62 美元是贷款本金的扣除额；而其余的都是利息. 在接下来的每一个月，用于偿还本金的支付额以倍数 1.007 5 增长. □

考虑以下两个现金流序列：

$$b_1, b_2, \cdots, b_n \quad \text{和} \quad c_1, c_2, \cdots, c_n.$$

在什么条件下对任何正利率 r 第一个序列的现值不小于第二个序列的现值? 显然，$b_i \geqslant c_i (i=1, \cdots, n)$是一个充分条件. 然而，还可以得到一个稍弱些的充分条件. 令

$$B_i = \sum_{j=1}^{i} b_j \quad \text{和} \quad C_i = \sum_{j=1}^{i} c_j, \quad i = 1, \cdots, n;$$

则可以看到，下列条件就足够了：

$$B_i \geqslant C_i, \quad \text{对每一个 } i = 1, \cdots, n$$

下面的命题给出了一个更弱的充分条件.

命题 4.2.1 如果 $B_n \geqslant C_n$，并且对每一个 $k=1, \cdots, n$,

$$\sum_{i=1}^{k} B_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} C_i,$$

则对每一个 $r>0$，有

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(1+r)^{-i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} c_i(1+r)^{-i}.$$

换句话说，如果满足下面两个条件：

i) b 现金流的金额之和不小于 c 现金流的金额之和；

ii) 对每一个 $k=1, \cdots, n$，有

$$kb_1 + (k-1)b_2 + \cdots + b_k \geqslant kc_1 + (k-1)c_2 + \cdots + c_k.$$

那么命题 4.2.1 告诉我们：对于每一个正的利率 r，现金流序列 $b_1, \cdots, b_n$ 的现值不小于现金流序列 $c_1, \cdots, c_n$ 的现值.

4.3 回报率

考虑一项投资，初始支出为 a $(a>0)$，一期后得到本息和为 b. 这个投资的回报率定义为使得最终回报的现值等于其初始支付的那个利率 r. 即回报率是满足下式的 r：

$$\frac{b}{1+r} = a \quad \text{或} \quad r = \frac{b}{a} - 1.$$

例如，100 美元的投资，在一年后收回 150 美元，则称这个投资具有年回报率 0.50.

更一般地，考虑一个初始支出为 a $(a>0)$ 的投资，可以得到一连串非负的收益 $b_1, \cdots, b_n$. 其中 b_i 是在第 i $(i=1, \cdots, n)$ 期的期末得到的收益，并且 $b_n>0$. 我们定义该投资每期的回报率为下述利率的值：它使得在该利率下现金流序列的复利现值等于零. 如果我们定义函数 P 为

$$P(r) = -a + \sum_{i=1}^{n} b_i(1+r)^{-i}, \tag{4-2}$$

那么这个投资每期的回报率为满足下式的 r^* $(r^*>-1)$：

$$P(r^*) = 0.$$

由于假设了 $a>0$，$b_i \geqslant 0$，$b_n>0$，所以当 $r>-1$ 时，$P(r)$ 是关于 r 的严格递减的函数. 这意味着(由于 $\lim_{r \to -1} P(r) = \infty$ 和 $\lim_{r \to \infty} P(r) = -a < 0$) 存在唯一的 r^* 满足前面的方程. 而且，由于

$$P(0) = \sum_{i=1}^{n} b_i - a,$$

所以(见图 4-1)，如果有

$$\sum_{i=1}^{n} b_i > a,$$

则 r^* 是正值；而若

61
~
62

$$\sum_{i=1}^{n} b_i < a,$$

则 r^* 是负值.

这就是说，如果得到的全部本息和超过了初始的投资额，就得到正的回报率；反之则得到负的回报率. 此外，由 $P(r)$的单调性，如果利率小于 r^*，则现金流序列具有正的现值；而如果利率大于 r^*，则现金流的现值为负值.

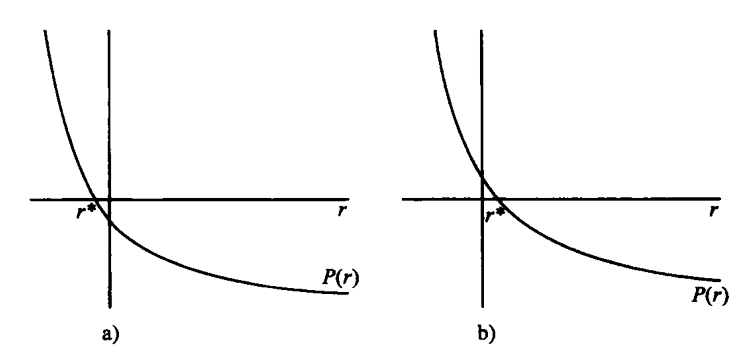


图 4-1 $P(r)=-a+\sum_{i\geqslant 1} b_i(1+r)^{-i}$: a) $\sum_i b_i < a$; b) $\sum_i b_i > a$

当投资的每期回报率为 r^* 时，经常称这个投资有每期 $100r^*$ %的回报率.

例 4.3a 求下列投资的回报率：初始投资为 100，在头两期每期期末都可得到 60 的收益.

63

解：回报率是下列方程的解：

$$100=\frac{60}{1+r}+\frac{60}{(1+r)^2}.$$

令 $x=1/(1+r)$，则上式可写为

$$60x^2+60x-100=0,$$

由此解出

$$x=\frac{-60\pm\sqrt{60^2+4(60)(100)}}{120}.$$

由 $-1<r$ 可以推出 $x>0$，从而得到解

$$x=\frac{\sqrt{27\ 600}-60}{120}\approx 0.884\ 4.$$

因此，回报率 r^* 满足

$$1+r^*\approx\frac{1}{0.884\ 4}\approx 1.131.$$

所以，该项投资得到了大约每期 13.1%的回报率. □

支付超过两期的投资回报率通常要用数值方法求解. 但由于 $P(r)$ 的单调性, 试算法是一个很有效的方法.

注 1)如果假设现金流序列 b_1, …, b_n 代表贷出 a 的贷款人在随后每期的支付额, 那么贷款人的每期回报率 r^* 就是借款人每期支付的实际利率.

2) r^* 有时也被称为内部回报率.

现在考虑一个更一般的投资现金流序列 c_0, c_1, …, c_n. 如果 $c_i \geqslant 0$, 那么 c_i 表示在第 i 期的期末投资者得到的收益; 而如果 $c_i < 0$, 那么 $-c_i$ 表示在第 i 期的期末投资者需要支付的数额. 令

64

$$P(r) = \sum_{i=0}^{n} c_i (1+r)^{-i}$$

表示每期利率为 r 时这个现金流的现值, 那么一般来说在 $r > -1$ 的范围内, 下式是不一定有唯一解的:

$$P(r) = 0.$$

因此, 对于比现在所考虑的更为一般的现金流来说, 回报率这个概念是不确定的. 此外, 即使在上面的方程有唯一解 r^* 的情况下, 还可能产生 $P(r)$ 并不是 r 的单调函数这个问题, 因而并不能断定当利率在 r^* 的一侧时这个投资就可以取得正值的回报, 而在另一侧时得到负值的回报.

还可证明, 存在唯一解的一个一般情况是: 现金流序列开始于一个负值(相对应地, 正值), 最后变为正值(负值), 并且从该变化点一直保持非负值(非正值). 换句话说, 序列 c_0, c_1, …, c_n 具有单一的符号变化, 则由笛卡儿符号法则, 在已知至少有一个解存在时, 就可以得知在 $r > -1$ 的范围内, 方程 $P(r) = 0$ 有唯一解.

4.4 连续变化利率

假设利息按连续复利方式计算, 但利率随时间变化. 设现在时刻是 0, $r(s)$ 表示在 s 时刻的利率. 这样, 如果在 s 时刻将 x 存入银行, 则

$s+h$ 时刻账户上的总额 $\approx x(1+r(s)h)$ (h 很小)

$r(s)$ 称为在 s 时刻的即期或瞬时利率.

令 $D(t)$ 表示在 0 时刻存入 1 到 t 时刻账户上的金额. 为了用利率 $r(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$ 来决定 $D(t)$, 注意到(对于很小的 h)

$$D(s+h) \approx D(s)(1+r(s)h)$$

65

或

$$D(s+h) - D(s) \approx D(s)r(s)h$$

或

$$\frac{D(s+h)-D(s)}{h}\approx D(s)r(s).$$

当 h 变得越来越小时，上述近似计算变得越来越精确. 因此，对 $h\to 0$ 取极限，可以得到

$$D'(s)=D(s)r(s)$$

或

$$\frac{D'(s)}{D(s)}=r(s),$$

这意味着

$$\int_0^t \frac{D'(s)}{D(s)}\mathrm{d}s=\int_0^t r(s)\mathrm{d}s$$

或

$$\log(D(t))-\log(D(0))=\int_0^t r(s)\mathrm{d}s.$$

因为 $D(0)=1$，由前面的等式可以得到

$$D(t)=\exp\left\{\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\right\}.$$

现在令 $P(t)$ 表示 t 时刻单位资金的当前(例如，时刻 0)价值($P(t)$ 可看作在时刻 t 能得到 1 单位收益的债券的价格；如果利率永远等于 r，则它等于 e^{-rt}). 因为在时刻 0 存入 $1/D(t)$ 可在 t 时刻得到 1，因此有

$$P(t)=\frac{1}{D(t)}=\exp\left\{-\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\right\}. \tag{4-3}$$

令 $\bar{r}(t)$ 表示直到时刻 t 的即期利率的平均值，即

$$\bar{r}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t r(s)\mathrm{d}s.$$

66 函数 $\bar{r}(t)(t\geqslant 0)$ 称为**收益曲线**.

例 4.4a 已知

$$r(s)=\frac{1}{1+s}r_1+\frac{s}{1+s}r_2.$$

求出收益曲线和现值函数.

解： 改写 $r(s)$ 为

$$r(s)=r_2+\frac{r_1-r_2}{1+s},\quad s\geqslant 0,$$

则可以给出以下的收益曲线

$$\bar{r}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\left(r_2+\frac{r_1-r_2}{1+s}\right)\mathrm{d}s$$

$$= r_2 + \frac{r_1 - r_2}{t}\log(1+t).$$

因此，现值函数为

$$\begin{aligned} P(t) &= \exp\{-t\bar{r}(t)\} \\ &= \exp\{-r_2 t\}\exp\{-\log((1+t)^{r_1-r_2})\} \\ &= \exp\{-r_2 t\}(1+t)^{r_2-r_1}. \end{aligned}$$

□

4.5 习题

练习 4.1 若 10%的名义利率分别为

a)半年计息一次的复利；

b)每季度计息一次的复利；

c)连续复利.

其对应的有效利率分别是多少？

练习 4.2 假设将钱存入银行中，银行支付的名义利率为 10%. 如果利率是连续复利利率，那么多长时间后存入的钱才能是原来的两倍？

练习 4.3 如果利率为 5%，每年计息一次，那么大约要多少年时间才能使你的钱变为原来的四倍？如果利率变为 4%，又要多少年？

67

练习 4.4 如果利率为年复利利率 r，请给出一个公式，用它来估计要多少年时间才能使你的钱变为原来的三倍.

练习 4.5 假设年名义利率固定在 6%，每月计息一次. 在未来的 60 个月中，每月需要投资多少钱，才能在 60 个月后得到 100 000 美元？

练习 4.6 一个投资的年现金流为

$$-1\,000,\ -1\,200,\ 800,\ 900,\ 800.$$

年利率为 6%. 对于一个既可以借款也可以存款的人，这是否是一个值得的投资？

练习 4.7 考虑两个可能的年末收益序列：

20，20，20，15，10，5 和 10，10，15，20，20，20.

如果每年计息一次的年复利利率分别为 a)3%，b)5%，c)10%，哪个现金流序列更可取？

练习 4.8 一个五年期、面值为 10 000 美元、具有 10%息票率的债券，价值 10 000 美元. 在今后五年中，每六个月支付给持有者 500 美元，并且将在这十次支付末再支付本金 10 000 美元. 如果每月计息一次的利率为：a)6%，b)10%，c)12%，求出其现值.

练习 4.9 一个朋友购买了一套新的价值 4 200 美元的音响系统. 他同意预付定金 1 000 美元，并在一个月后开始每月支付 160 美元，共支付 24 个月. 那么所支付的有效利率为多少？

练习 4.10 假设年利率为 20%，重新考虑例 4.2b.

练习 4.11 假设新机器每年的成本增加 1 000 美元，重新考虑例 4.2b.

68

练习 4.12 假设向银行贷款 120 000 美元，银行收取两个百分点的费用. 报价利率为每月 0.5%. 仅需要在随后的 36 个月中，每月支付累积利息，并在最后支付本金 120 000 美元. 那么这个贷款的有效利率是多少?

练习 4.13 以下面两种方式偿还贷款：一种是现在一次还清所有的欠款 16 000美元；另一种是现在还 10 000 美元，并在十年后再还 10 000 美元. 对于下面的名义连续复利利率，哪一种还款方式更可取?

a)2%，b)5%，c)10%.

练习 4.14 一种五年期的美国国库券(以平价 1 000 美元卖出)具有 6%的息票率，这意味着，在支付 1 000 美元购买了这个国库券后，购买者将在今后的九个半年期的每期期末得到 30 美元，并将在第十个半年期末得到 1 030 美元. 换句话说，这个债券支付每半年 3%的单利，并将在五年末支付本金. 假设连续复利利率为 5%，那么这个现金流的现值是多少?

练习 4.15 请解释为什么 $(1+0.05/n)^n$ 是 n 的增函数，对于 $n=1, 2, 3, \cdots$.

练习 4.16 一个银行支付 6%的名义连续复利利率. 如果最初存入 100 美元，经过 a)30 天，b)60 天，c)120 天，分别可以得到多少利息?

练习 4.17 假设连续复利利率为 r. 你打算今天借款 1 000 美元，一年后借款 2 000 美元，两年后再借款 3 000 美元，并将在三年后还清全部借款. 那么三年后你将支付多少钱?

练习 4.18 假设每年计息一次的名义利率为 5%. 为了得到现金流 3，5，-6，5，其中第 i 个值将在从现在算起的 i 年后得到，$i=1, 2, 3, 4$(支付值 -6 意味着你将要在 3 年后支付 6)，那么现在要支付多少钱?

69

练习 4.19 令 r 为每年计息一次的名义利率. r 如何取值才能使现金流 20，10 优于现金流 0，34?

练习 4.20 如果名义连续复利利率为 6%，要多长时间才能使 1 000 的存款增长到 1 500?

练习 4.21 假设连续复利利率为 r，对于一个在每个时刻 $s, s+t, s+2t, \cdots$，均会得到 A 的现金流序列，其现值为多少?

练习 4.22 假设连续复利利率为 r，在 0 时刻存入 D，用 $D(t)$表示在 t 时刻账户中的本息和.

a)证明对于一个很小的 h，$D(t+h)\approx D(t)+rhD(t)$；

b)利用 a)证明：$D'(t)=rD(t)$；

c)利用 b)证明：$D(t)=De^{rt}$.

练习 4.23 考虑下面两个现金流，其中每一个现金流都是在 i 年后得到第 i

次支付：

100，140，131 和 90，160，120.

如果不知道利率，能够说出哪个现金流更可取吗？

练习 4.24

a)一个初始成本为 100 的投资，两年后收益 110，求该投资的年收益率.

b)一个初始成本为 100 的投资，两年后或收益 120，或收益 100，且两种结果是等可能的，求年收益率的期望值.

练习 4.25 一个具有面值 F 的零息票债券在债券到期日时支付给持有者本息和 F. 假设连续复利利率为 8%，请求出一个面值 $F=1\,000$ 的十年期零息票债券的现值.

70

练习 4.26 一个初始成本为 100 的投资，第一年末回报 40，第二年末回报 70，求该投资的收益率. 如果第一年末回报 70，第二年末回报 40，收益率又是多少？

练习 4.27

a)一个初始成本为 1 的投资，收到的回报为非负现金值 x_1，x_2，…，x_n，其中，x_i 为第 i 个周期末收到的现金值. 为了判定每个周期的投资回报率是否超过 10%，是否必须首先解方程 $1=\sum_{i=1}^{n} x_i(1+r)^{-i}$ 以求出回报率 r？

b)对一个原始资本为 100 的投资，投资者在后三期末分别收到总量为 8，16，110 的回报. 问投资回报率是 11%吗？

练习 4.28 一个初始成本为 100 的投资，在第 i 个周期末收到的回报为 X_i $(i=1, 2)$，其中 X_1，X_2 是相互独立的正态随机变量，均值为 60，方差为 25. 该投资回报率大于 10%的概率是多少？

练习 4.29 通货膨胀率定义为价格总体的增长比率. 例如，如果年通货膨胀率为 4%，那么去年价值 100 美元的物品，今年要花费 104 美元. 令 r_i 表示通货膨胀率，并考虑一个回报率为 r 的投资. 通常关心从投资使得购买力增加了多少这个角度来决定投资的回报率. 称这个量为投资的*扣除物价因素的回报率*，记作 r_a. 由于一年后 $(1+r)x$ 的购买力等于现在 $(1+r)x/(1+r_i)$ 的购买力，因此关于常量购买力单位，这个投资在一期内将数量 x 转化为 $(1+r)x/(1+r_i)$. 因而，其经通货膨胀调整的回报率为

$$r_a=\frac{1+r}{1+r_i}-1.$$

当 r 和 r_i 都很小时，可以得到以下的近似公式：

$$r_a \approx r-r_i.$$

71

例如，通货膨胀率为 3%，银行提供 5%的单利，其扣除物价因素的回报率大约为 2%. 那么它的确切值是多少？

练习 4.30 考虑一个投资现金流序列 c_0，c_1，…，c_n，其中 $c_i<0$，$i<n$，且 $c_n>0$. 请验证：如果

$$P(r)=\sum_{i=0}^{n}c_i(1+r)^{-i},$$

那么在 $r>-1$ 的范围内，

a) $P(r)=0$ 存在唯一解；

b) $P(r)$不一定是 r 的单调函数.

练习 4.31 假设你向银行借款的年利率为 8%，而存款的年利率为 5%. 如果你一开始的资金为零，一项投资的年现金流为

$$-1\,000,\ 900,\ 800,\ -1\,200,\ 700,$$

你是否应该投资?

练习 4.32 请验证，如果 $r(t)$是 t 的非减函数，那么 $\bar{r}(t)$也是 t 的非减函数.

练习 4.33 请验证，收益曲线 $\bar{r}(t)$是 t 的非减函数，当且仅当

$$P(\alpha t)\geqslant(P(t))^{\alpha}\quad 或者\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1,\quad t\geqslant 0.$$

练习 4.34 验证

$$\text{a)}\ r(t)=-\frac{P'(t)}{P(t)}\quad 和\quad \text{b)}\ \bar{r}(t)=-\frac{\log P(t)}{t}.$$

练习 4.35 画出在下列情形时，例 4.4a 中的即期利率函数 $r(t)$的曲线：

a) $r_1<r_2$；

b) $r_2<r_1$.

参考注

72

命题 4.2.1 的证明见 Adler, Ilan and Sheldon M. Ross (2001). “A Probabilistic Approach to Identifying Positive Value Cash Flows,” *The Mathematical Scientist*, 26.2.

第5章　合约的套利定价

5.1　期权定价的一个例子

假设名义利率为 r，考虑下面的期权定价模型，该期权是未来以指定价格购买一种股票. 设该股票现价(以美元计价)为每股100，并且已知在一个时间段后它的价格为200或50(见图5-1). 进一步假设，对任意 y，可以以 Cy 的成本在时刻0购买 y 股期权，使得在时刻1可以以每股150的价格买入 y 股股票. 如果购买了这样的期权且股价涨到200，那么可以在时刻1执行期权，并从已购买的 y 股期权中的每一股实现 $200-150=50$ 的利润. 另一方面，如果时刻1时股票价格是50，那么期权将一文不值. 除了期权外，也可在时刻0以 $100x$ 的成本买进 x 股股票，每一股股票在时刻1的价值将是200或50.

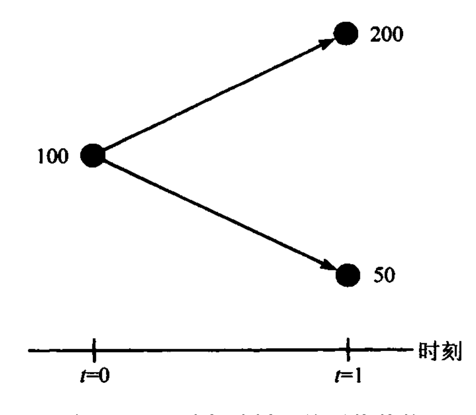


图5-1　股票在时刻1的可能价格

假定 x 和 y 的值均可为正、负或零. 也就是说，可以买进或卖出股票和期权. 例如，若 x 为负，表示卖出了 x 股股票并带来了 $-100x$ 的初始回报，因而有责任在时刻1以每股200或50的成本买入并归还这 $-x$ 股股票.（当卖出一种不拥有的股票时，称为卖空.）

下面决定单位期权价格 C 合适的值. 将证明：若 r 是单位时期的利率，只要不是 $C=[100-50(1+r)^{-1}]/3$，就存在一个购买组合，它在任何情况下都能带来正的利润现值. 为说明这一点，假设在时刻0

$$\text{买入 } x \text{ 单位股票}$$

且

$$\text{买入 } y \text{ 单位期权}$$

这里 x 和 y(二者均可正可负)的值待定. 这个交易的成本为 $100x+Cy$. 如果此成本为正，那么该款项应该是从银行借得，并在时刻1连同利息一起归还；而若

其为负，则所收到的款项$-(100x+Cy)$应存入银行并在时刻 1 取回. 所持资产在时刻 1 的价值取决于股票在当时的价格，它可由以下公式给出：

$$价值=\begin{cases}200x+50y & 如果价格为 200,\\ 50x & 如果价格为 50.\end{cases}$$

该公式可以验证如下：如果股票在时刻 1 的价格为 200，那么 x 股股票的价值为 $200x$，以每股 150 的价格购买股票的 y 单位期权的价值为$(200-150)y$. 另一方面，如果股票价格为 50，那么 x 股股票的价值为 $50x$，而 y 单位这样的期权将毫无价值. 现在，要选择一个合适的 y 值，以使得在时刻 1，无论股票价格为多少，所持资产的价值均相同. 这就是说，要选择满足下面条件的 y：

$$200x+50y=50x$$

或

$$y=-3x.$$

73 ~ 74

注意 y 和 x 的符号相反，因此当 $x>0$ 时，在 0 时刻买入 x 股股票，同时将卖出 $3x$ 单位的股票期权. 类似地，如果 x 为负值，那么 0 时刻将卖空 $-x$ 股股票，并同时买入 $-3x$ 单位的股票期权.

这样，只要满足 $y=-3x$，那么无论股票价格为多少，都有

$$在时刻 1 所持资产的价值=50x$$

因此，如果 $y=-3x$，那么在还清所有贷款(如果 $100x+Cy>0$)或从银行取出存款(如果 $100x+Cy<0$)后，可以获利

$$\begin{aligned}获利&=50x-(100x+Cy)(1+r)\\&=50x-(100x-3xC)(1+r)\\&=(1+r)x[3C-100+50(1+r)^{-1}].\end{aligned}$$

于是，如果 $3C=100-50(1+r)^{-1}$，那么赢利为 0. 而另一方面，如果 $3C\neq100-50(1+r)^{-1}$，那么就可以保证得到正的赢利(无论股票在时刻 1 的价格如何)，只要当 $3C>100-50(1+r)^{-1}$时取 x 为正值，而当 $3C<100-50(1+r)^{-1}$时取 x 为负值.

举个例子，如果$(1+r)^{-1}=0.9$，每个期权的价格为 $C=20$，那么购买一股股票和卖出三个单位的期权要花费 $100-3(20)=40$，这些钱要从银行借. 然而，无论股票的价格涨到 200 还是跌到 50，这些资产在时刻 1 的价值都将是 50. 用这些钱中的 $40(1+r)=44.44$ 来归还银行贷款，则可以确保赢利 5.56. 类似地，如果一个期权的价格为 15，那么卖出一股股票($x=-1$)并买入三个单位的期权，则可以得到初始赢利 $100-45=55$，将这些钱存入银行则可以在时刻 1 得到 $55(1+r)=61.11$. 因为资产在时刻 1 的价值为 -50，因此可以确保赢利 11.11. 一个确保赢利的赌博方案称为套利. 对于所考虑的这些数值，唯一不会产生套利的期权成本 C 应该为 $C=(100-45)/3=55/3$.

套利的存在性可以由下面的一价律来判别.

命题 5.1.1(一价律) 考虑两个投资，第一个投资的成本是固定数额 C_1，第二个投资的成本为固定数额 C_2. 如果第一个投资的回报(现值)总是和第二个投资的回报(现值)相等，则要么 $C_1=C_2$，要么存在套利.

75

一价律的证明是很直接的，因为如果它们的成本不相同，那么通过买入成本少的投资而卖出成本高的投资就得到一个套利.

下面用一价律来说明前面的例子，注意购买看涨期权的投资在时刻 1 的回报为

$$\text{期权的回报} = \begin{cases} 50 & \text{如果价格为 } 200, \\ 0 & \text{如果价格为 } 50. \end{cases}$$

现考虑另一个投资，它要求通过向银行借款 x(在时刻 1 连本带息一次还清)并利用自己的资金 $100y-x$ 来购买 y 股证券. 因此，这个投资的初始成本是 $100y-x$，在时刻 1 的回报为：

$$\text{投资的回报} = \begin{cases} 200y - x(1+r) & \text{如果价格为 } 200, \\ 50y - x(1+r) & \text{如果价格为 } 50. \end{cases}$$

这样，如果选择合适的 x 和 y 使得

$$200y - x(1+r) = 50,$$
$$50y - x(1+r) = 0,$$

那么从这个投资和期权得到的回报是一样的. 解上面的方程可以得到：

$$y = \frac{1}{3}, \quad x = \frac{50}{3(1+r)}.$$

因为 x 和 y 取上面的值后，这个投资的成本为 $100y-x=\left(100-\frac{50}{1+r}\right)/3$，由一价律可以得知，要么它等于期权的成本，要么存在套利.

容易验证，当期权的成本 C 不等于 $\left(100-\frac{50}{1+r}\right)/3$ 时套利的存在性(买入成本低的投资，卖出成本高的投资). 下面详述此过程.

76

情形 1：$C<\left(100-\frac{50}{1+r}\right)/3$.

在这种情况下，卖出 1/3 股股票. 在得到的 100/3 中，用 C 来购买期权，并将其余的$\left(\text{大于}\frac{50}{3(1+r)}\right)$存入银行.

如果在时刻 1 时股票的价格为 200，那么期权价值 50，并且银行中的存款多于 50/3. 因此有足够的钱来偿还 200/3 的债务(这是由于卖空 1/3 股股票). 如果股票在时刻 1 的价格为 50，那么银行中的存款多于 50/3，足够偿还 50/3 的债务.

情形 2：$C>\left(100-\frac{50}{1+r}\right)/3$.

在这种情况下，卖出期权，从银行借款$\frac{50}{3(1+r)}$，并用前两项收入中的 100/3 购买 1/3 股股票. $\left(\text{剩下的钱 } C-\left(100-\frac{50}{1+r}\right)/3 \text{ 就是套利所得.}\right)$如果股票在时刻 1 的价格为 200，那么使用卖出 1/3 股股票所得的 200/3 来偿还欠银行的 50/3，并支付 50 给期权的买方. 如果在时刻 1 股票的价格为 50，那么卖出的期权将毫无价值，只要用从卖出 1/3 股股票中所得的 50/3 来偿还银行借款就可以了.

注 应该注意的是，我们已经并将继续假定(除非特别说明)：总存在这样一个市场，在其中任何投资都是随时可以买卖的.

5.2 通过套利定价的其他例子

5.1 节中所考虑的期权称为*看涨期权*，因为它给投资者以特定价格(称为*执行价*或*敲定价*)购买股票的权利. *美式期权*允许投资者在期权到期日及此前的任何时刻执行期权，而*欧式期权*只能在期权到期日执行. 虽然从表面上看，美式期权由于其更多的灵活性，可能会更值钱，但是实际上提前执行美式看涨期权永远都不是一个最佳的选择. 因此这两种期权的价值是相同的. 下面我们就来证明这个结论.

77

命题 5.2.1 *美式看涨期权不应该在其到期日 t 之前执行.*

证明：假设股票现在的价格为 S，有一个 t 时刻到期的期权，它给其持有者以固定价格 K 买入一股股票的权利. 如果你现在就执行这个期权，将得到 $S-K$. 然而，考虑在另一种选择下将会出现什么情况：如果不执行期权，转而卖空股票，并在 t 时刻以当时的市场价格和期权执行价 K 中较小者买入股票. 在这个投资策略下，一开始就可以得到 S，在 t 时刻只需要支付股票当时的市场价格和期权执行价 K 之中较小者. 显然这比得到 S 并立即支付 K 更可取. □

除了看涨期权，还有股票*看跌期权*. 这种期权给予投资者以特定价格卖出股票的权利. 美式看跌期权允许投资者在期权到期日及此前的任何时刻卖出股票，即执行期权. 欧式看跌期权只能在期权到期日时执行. 和看涨期权的情况相反，提前执行一个看跌期权可能是很有利的，因此美式看跌期权可能会比欧式看跌期权更值钱. 如果不存在套利，可以得到这两类期权之间的一个关系. 设有一个到期日为 t，执行价为 K 的欧式看跌期权；此外还有另一个到期日是 t，执行价也为 K 的欧式看涨期权. 它们满足的关系就是下面的*看跌-看涨期权平价公式*.

命题 5.2.2 *令 C 是一个看涨期权的价格，该期权使其持有者有权在 t 时刻以执行价 K 买入一股股票. 同时，令 P 是一个欧式看跌期权的价格，此期权给*

其持有者在 t 时刻以执行价 K 卖出一股股票的权利. 设 S 是股票在 0 时刻的价格，假设利息是以名义利率 r 连续折现的. 那么，要么存在关系

$$S+P-C=Ke^{-rt}$$

要么存在套利机会.

证明：如果

$$S+P-C<Ke^{-rt},$$

78

那么我们通过在 0 时刻购买一股股票，同时买入一个看跌期权，并卖出一个看涨期权，就可以确保赢利. 这个初始的投入 $S+P-C$ 是从银行借款，并将在 t 时刻偿还. 现在考虑所持资产在 t 时刻的价值. 根据股票在 t 时刻的市场价值，$S(t)$存在两种情形. 如果 $S(t)\leqslant K$，那么卖出的看涨期权毫无价值，我们可以执行看跌期权，以价格 K 卖出股票. 另一方面，如果 $S(t)>K$，那么买入的看跌期权毫无价值，而看涨期权将被执行，这迫使我们以价格 K 卖出股票. 由于 $K>e^{rt}(S+P-C)$，在每一种情况下，我们都可以有足够的资金偿还银行借款，并实现正的利润.

当

$$S+P-C>Ke^{-rt}$$

时，我们可以通过与上面步骤反向的投资策略来确保正的利润. 即卖出一股股票，同时卖出一个看跌期权，并买入一个看涨期权. 我们将证明的细节留给读者. □

套利原理还可以用来决定股票的当前价格和在将来特定时间购买股票的合同价格之间的关系. 下面是关于远期合约的两个例子.

例 5.2a(远期合约) 设 S 是某股股票当前的市场价格. 在一个远期合约中，合约双方在 0 时刻分别同意在未来时刻 t 以价格 F 购买和交割一股股票. 这就是说，双方约定了在 t 时刻付款交割的股票价格. 现对下述结论给出一个套利证明：如果利息是以名义利率 r 连续折现的，那么为了使得不存在套利机会，必须有以下关系：

$$F=Se^{rt}.$$

为看出这个等式为何成立. 首先我们假设

$$F<Se^{rt}.$$

在这种情况下，通过在 0 时刻卖出股票就可以确保赢利. 当然需要在 t 时刻将股票买回. 将卖出股票所得的 S 投入一个 t 时刻到期的债券，并购买一个约定在 t 时刻交割一股股票的远期合约. 这样，在 t 时刻将从债券中得到 Se^{rt} 的收入，从此款项中拿出 F 来购买一股股票以偿还债务. 这样，最终就可以得到正的利润 $Se^{rt}-F$. 另一方面，如果

79

$$F>Se^{rt},$$

那么，通过同时卖出一个远期合约和借款 S 来购买一股股票，就可以保证得到利润 $F-Se^{rt}$. 事实上在此投资策略下，到了时刻 t，可以从交割股票中得到 F，利用其中的一部分就可支付所欠的贷款本息 Se^{rt}.

注 在上面的例子中，也可通过一价律来解释 $F=Se^{rt}$. 考虑以下的两个投资，它们最终结果都是在 t 时刻拥有证券.

1)将 Fe^{-rt} 存入银行，并购买一个远期合约；

2)购买证券.

这样，由一价律，要么 $F=Se^{rt}$，要么存在套利.

在股票市场上购买一股股票时，就是购买发行股票的经济实体的一股所有权. 另一方面，商品市场涉及更为具体的物品，如农产品有燕麦、玉米和小麦；能源产品有原油和天然气；金属有金、银和白金；动物有猪肉、猪内脏和牛肉；等等. 商品市场中几乎所有的交易都会涉及未来买卖商品的合约. 例如，可以购买一个合约，以今天约定的价格在90天后购买天然气.（这种期货合约和远期合约是有区别的，虽然它们都会在交割时全额支付，但在期货合约中，每个交易日都要根据商品交易所期货合约价格变化情况清算一次.）也可以卖出一个期货合约，指定自己在特定的时间以特定的价格卖出天然气. 绝大多数活跃于商品市场的投资者都从未和商品有过真正的接触，事实上购买期货合约的投资者多数都会在交割日之前卖出合约. 然而，在例5.2a中给出的关系对商品市场的期货合约并不适用. 原因是当 $F>Se^{rt}$ 时，如果购买了商品(例如，原油)，打算在 t 时刻卖出，那么还要支付额外的费用来储藏及为这些原油进行保险. 另一方面，如果 $F<Se^{rt}$，要想以今天的价格卖出商品，必须要能够立即进行交割.

80

远期合约中最常见的一种是涉及货币交换的合约，这将在下一个例子中介绍.

例5.2b 在1998年9月4日的《纽约时报》上给出了以下关于德国马克(DM)的报价：

- 当日：0.577 7；
- 90天远期：0.580 8.

换句话说，当天可以用0.577 7美元购买1德国马克. 此外，也可以签署一个合约，在90天后以0.580 8美元的价格购买1德国马克. 为什么这两个价格不同呢？

解：人们可能会觉得价格的差别是由于在这90天中，德国马克相对美元价值的市场预期所引起的. 事实上这种价格差别完全是由于德国和美国不同的利率所致. 假设这两个国家的利息都是以下面的名义年利率连续计算复利的：美国的是 r_u，而德国的是 r_g. 令 S 表示1德国马克的当前价格，F 表示在 t 时刻交割的远期合约的交割价格.（这个例子考虑的是特殊的情况，即 $S=0.577\ 7$，

$F=0.5808$，$t=90/365$.）下面证明：为了不存在套利机会，必须满足

$$F = Se^{(r_u - r_g)t}.$$

要知道这是为什么，考虑在 t 时刻得到 1 德国马克的下述两种途径：

1)将 $Fe^{-r_u t}$ 存入一家美国银行，购买一个远期合约使得可以在 t 时刻购买 1 德国马克.

2)购买 $e^{-r_g t}$ 德国马克，并将它们存入一家德国银行.

注意，成本为 $Fe^{-r_u t}$ 的第一笔投资和成本为 $Se^{-r_g t}$ 的第二笔投资，在 t 时刻都可以得到 1 德国马克. 因此，由一价律，要么 $Fe^{-r_u t} = Se^{-r_g t}$，要么存在套利.

[81]

当 $Fe^{-r_u t} < Se^{-r_g t}$ 时，通过从一家德国银行借入 1 德国马克，以 S 美元的价格卖出，并将所得存入一家美国银行，就可以得到套利机会. 同时，购买一个约定在 t 时刻购买 $e^{r_g t}$ 马克的远期合约. 到时刻 t，你将拥有 $Se^{r_u t}$ 美元. 用其中的 $Fe^{r_g t}$ 去履行远期合约承诺并购回 $e^{r_g t}$ 马克，将这些马克还给那家德国银行. 由于 $Se^{r_u t} > Fe^{r_g t}$，可以从这些交易中确保正的收益.

当 $Fe^{-r_u t} > Se^{-r_g t}$ 时，通过从一家美国银行借入 $Se^{-r_g t}$ 美元，用它们来购买 $e^{-r_g t}$ 马克，并存入一家德国银行，这样也可以得到套利机会. 类似地，卖出一个约定在 t 时刻购买 1 马克的远期合约. 到了 t 时刻，从德国银行中取出 1 马克给远期合约的买方，将由此得到 F. 因为 $Se^{-r_g t}e^{r_u t}$（为偿还贷款必须要支付给美国银行的数额）小于 F，因此获得一个套利. □

下面是一价律的一个推广.

命题 5.2.3（广义一价律） *考虑两个投资，第一个投资的成本为固定数额 C_1，第二个投资的成本为 C_2. 如果 $C_1 < C_2$，并且从第一个投资得到的回报（现值）总是不少于从第二个投资得到的回报（现值），那么存在套利.*

显然同时购买投资 1 和卖出投资 2 就是一个套利.

在应用广义一价律前，我们需要以下的定义.

定义 *如果对所有的 x 和 y，以及 $0<\lambda<1$，有*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

则称函数 $f(x)$ 为凸函数.

我们从几何上来解释函数的凸性. 注意，$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ 是 $f(x)$ 和 $f(y)$ 之间连线上的一个点，它的值等于连接 $(x, f(x))$，$(y, f(y))$ 之间的直线方程在 $\lambda x+(1-\lambda)y$ 的值. 因此，凸性可以解释为，连接曲线 $f(x)$ 上任意两点的直线段总是在这段曲线之上方（或与曲线重合）（见图 5-2）.

[82]

命题 5.2.4 *令 $C(K, t)$ 是以某特定证券为标的的看涨期权的价格，这个期权的敲定价为 K，到期日为 t.*

a) 对于固定的到期日 t，$C(K, t)$ 关于 K 是凸的非增函数.

b) 对于任意 $s>0$，有 $C(K, t)-C(K+s, t) \leqslant s$.

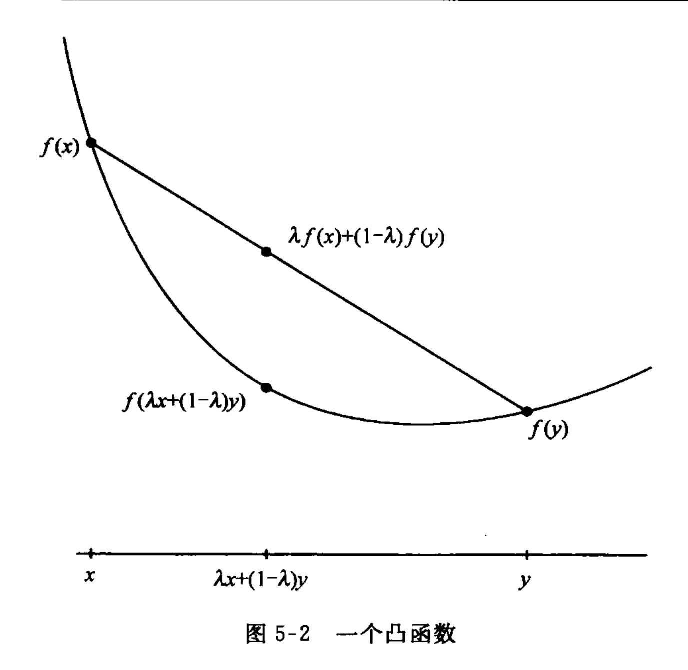


图 5-2 一个凸函数

证明：如果用 $S(t)$来表示标的证券在 t 时刻的价格，那么在 t 时刻看涨期权的回报是：

$$\text{期权的回报} = \begin{cases} S(t)-K & \text{若 } S(t) \geqslant K, \\ 0 & \text{若 } S(t) < K. \end{cases}$$

这就是说，

83

$$\text{期权的回报} = (S(t)-K)^+,$$

其中，x^+（称为 x 的正部）定义为：当 $x \geqslant 0$ 时取值 x，当 $x<0$ 时取值 0. 对于固定的 $S(t)$，从回报函数$(S(t)-K)^+$的图像（见图 5-3）可以看出，它是关于 K 的凸函数.

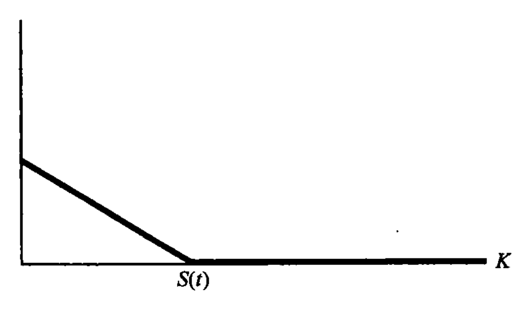


图 5-3 函数$(S(t)-K)^+$

为了证明 $C(K, t)$是关于 K 的凸函数，假设

$$K = \lambda K_1 + (1-\lambda)K_2, \quad 0 < \lambda < 1.$$

现在考虑以下两个投资：

1)购买 1 份$(K,\ t)$看涨期权.

2)购买 λ 份$(K_1,\ t)$看涨期权和$(1-\lambda)$份$(K_2,\ t)$看涨期权.

因为投资 1)在 t 时刻的回报为$(S(t)-K)^+$，而投资 2)在 t 时刻的回报为 $\lambda(S(t)-K_1)^+ +(1-\lambda)(S(t)-K_2)^+$，由函数$(S(t)-K)^+$的凸性可知，投资 2)的回报至少应该和投资 1)的回报一样大. 因此，由广义一价律，要么投资 2)的成本至少和投资 1)的成本相等，要么存在套利. 这就是说，要么

$$C(K,t) \leqslant \lambda C(K_1,t) + (1-\lambda)C(K_2,t)$$

要么存在套利. 这证明了函数 $C(K,\ t)$的凸性. 对于 $C(K,\ t)$是 K 的非增函数的证明，作为练习留给读者.

要证明 b)部分，应该注意到，如果 $C(K,\ t)>C(K+s,\ t)+s\mathrm{e}^{-rt}$，那么通过卖出一个 t 时刻到期、敲定价为 K 的看涨期权，买入一个 t 时刻到期、敲定价为 $K+s$ 的看涨期权，并把余额 $C(K,\ t)-C(K+s,\ t)\geqslant s\mathrm{e}^{-rt}$ 放入银行，就可以得到套利机会. 因为敲定价为 K 的期权的回报比敲定价为$K+s$ 的期权的回报最多多出 s，因此从这个投资组合总会得到正的利润. □ [84]

注 命题 5.2.4 中的 b)部分等价于下列不等式：

$$\frac{\partial}{\partial K}C(K,t) \geqslant -\mathrm{e}^{-rt}. \tag{5-1}$$

事实上，由 b)可以得到

$$C(K+s,t) - C(K,t) \geqslant -s\mathrm{e}^{-rt}, \quad s>0.$$

不等式两边同时除以 s，并令 s 趋向于 0，就可以得到式(5-1)的结果. 反之，假设式(5-1)成立，则

$$\int_K^{K+s} \frac{\partial}{\partial x}C(x,t)\mathrm{d}x \geqslant \int_K^{K+s} -\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}x,$$

故有

$$C(K+s,t) - C(K,t) \geqslant -s\mathrm{e}^{-rt},$$

这正是 b).

在下面的例子中，我们利用广义一价律证明，一个以指数(一组特定证券的价格的加权和)为标的的期权价格，永远不会高于以其中的每一个证券为标的的全部期权的价格. 这个结论有时称为*期权投资组合性质*.

例 5.2c 考虑 n 种证券，对于 $j=1,\ \cdots,\ n$，令 $S_j(y)$表示证券 j 在未来时刻 y 的价格. 对于固定的正数 w_j，令

$$I(y) = \sum_{j=1} w_j S_j(y).$$

即 $I(y)$ 是这组证券组合在时刻 y 的价格，其中这个投资组合中包含 w_j 股证券 j. 当说一个关于证券 j 的 (K_j, t) 看涨期权时，我们是指一个在 t 时刻到期的敲定价为 K_j 的看涨期权. 用 $C_j(j=1, \cdots, n)$ 分别表示这些期权的价格. 并且，令 C 表示以指数 I 为标的看涨期权的价格，这个期权的敲定价为 $\sum_{j=1}^{n} w_j K_j$，到期日为 t. 下面我们来证明，以指数为标的的期权的回报总是小于或者等于通过购买 $w_j(K_j, t)$ 个以证券 j $(j=1, \cdots, n)$ 为标的的看涨期权所得到的回报之和.

[85]

$$
\begin{aligned}
\text{指数期权在 } t \text{ 时刻的回报} &= \Big(I(t) - \sum_{j=1}^{n} w_j K_j\Big)^+ \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{n} w_j S_j(t) - \sum_{j=1}^{n} w_j K_j\Big)^+ \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{n} w_j (S_j(t) - K_j)\Big)^+ \\
&\leqslant \Big(\sum_{j=1}^{n} (w_j (S_j(t) - K_j))^+\Big)^+ \quad (\text{因为 } x \leqslant x^+) \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{n} w_j (S_j(t) - K_j)^+\Big)^+ \\
&= \sum_{j=1}^{n} w_j (S_j(t) - K_j)^+ \\
&= \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot [(K_j, t) \text{ 看涨期权的回报}].
\end{aligned}
$$

因此，由广义一价律得知，要么 $C \leqslant \sum_{j=1}^{n} w_j C_j$，要么存在套利. □

5.3 习题

练习 5.1 花费 10 买入一个指定证券的欧式看涨期权 $(K=100, t=2)$，假定连续复利名义年利率为 6%，分别求在 $t=2$ 时，证券价格为下列值该投资回报的现值.

a) 110；

[86]

b) 98.

练习 5.2 花费 5 买入一个指定证券的欧式看跌期权 $(K=100, t=1/2)$，假定月复利的名义年利率为 6%，求在下列情况下，该投资回报的现值.

a) $S(1/2)=102$；

b) $S(1/2)=98$.

练习 5.3 假设已知某一时期后某一证券的价格是 $s_1, \cdots, s_r$ 这 r 个值中的某一个. 当 $K<\min s_i$ 时，一个在时刻 1 以价格 K 购买该证券的看涨期权的价格为多少？

练习 5.4 令 C 是一个看涨期权的价格，其标的证券现在价格为 S，证明 $C\leqslant S$.

练习 5.5 令 C 是一个看涨期权的价格，这个期权可以在 t 时刻以价格 K 买入一个证券. S 是这个证券现在的价格，r 是利率. 请写出一个包含 C，S 和 Ke^{-rt} 的不等式，并给出证明.

练习 5.6 一个证券当前的价格是 30. 给定连续复利利率为 5%，请给出一个四个月期执行价为 28 的看涨期权价格的下界.

练习 5.7 令 P 是一个执行价为 K 和现价为 S 的证券的看跌期权的价格. 下面哪一个式子一定成立?

a) $P\leqslant S$.

b) $P\leqslant K$.

练习 5.8 令 P 是一个执行价为 K 和现价为 S 的证券的看跌期权的价格. 试证明

$$P\geqslant Ke^{-rt}-S,$$

其中 t 是期权的到期日，r 是利率.

练习 5.9 对于命题5.2.2，证明：如果 $S+P-C>Ke^{-rt}$，那么以下的投资策略总可以得到正的收益：卖出一股股票，卖出一个看跌期权，并买入一个看涨期权.

87

练习 5.10 请使用一价律证明看跌-看涨期权平价公式.

练习 5.11 一个证券的现值是 s，假定在 t 时刻，该证券的价格是 s_1 或 s_2，考虑一个该证券的 K，t 欧式看跌期权，设 $K>s_1>s_2$.

a)如果买入、卖出期权及证券，在 t 时刻的回报是多少?

b)看跌期权的无套利成本是多少?

练习 5.12 一个数据为(K，t)的看涨期权，在到期日 t，如果 $S(t)\geqslant K$，则付给持有人 1，如果 $S(t)<K$，则付给持有人 0. 一个数据为(K，t)的看跌期权，在到期日 t，如果 $S(t)<K$，则付给持有人 1，如果 $S(t)\geqslant K$，则付给持有人 0. 设 C_1 和 C_2 分别为基于同一证券的看涨期权与看跌期权的成本，求 C_1 与 C_2 之间的看跌-看涨平价关系.

练习 5.13 一个欧式看涨期权和一个欧式看跌期权具有相同的标的证券，同为三个月期，敲定价均为20，而且卖出价格都是3. 如果名义连续复利利率为10%，当前证券的价格为25，请写出一个套利策略.

练习 5.14 一个美式看涨期权和一个美式看跌期权具有相同的标的证券，相同的到期日 t，相同的敲定价 K. 其价格分别为 C_a 和 P_a. 如果标的证券当前的价格为 S，请给出一个包含 C_a，P_a，K 和 e^{-rt} 的等式或者不等式，并进行简要的解释.

练习 5.15 考虑两个具有相同标的证券、相同到期日 t 的看跌期权. 假设这两个期权的执行价分别为 K_1 和 K_2. 试证明

$$K_1 - K_2 \geqslant P_1 - P_2,$$

其中 P_i 是执行价为 K_i 的看跌期权的价格，$i=1$，2.

练习 5.16 请解释，为什么一个 t 时刻到期的美式看跌期权的价格不低于一个仅仅到期日要早一些的同样美式看跌期权的价格？

88

练习 5.17 说明下面的论断是否总是正确的，或者总是错误的，或者时对时错. 除了下面提到的以外，假设其余所有参数都是固定的. 并对所给答案作出简要的解释.

a)一个欧式看涨期权的价格关于其到期日是非减的.

b)一个以外币为标的的远期合约的价格关于其到期日是非减的.

c)一个欧式看跌期权的价格关于其到期日是非减的.

练习 5.18 你的财务顾问建议你同时购买一个欧式看跌期权和一个欧式看涨期权，这两个期权具有相同的标的证券，在三个月后同时到期，并且敲定价都为标的证券当前的价格.

a)这个投资策略在什么情况下是合理的？

b)将 $t=1/4$ 时刻该投资策略的回报看作该时刻证券价格的函数，画出其图形.

练习 5.19 如果一只股票在即将支付红利 d(即以每股金额 d 支付给股票的持有者)之前的价格为 s，那么支付完红利后股票的价格为多少？

练习 5.20 令 $S(t)$表示某一证券在 t 时刻的价格. 以下的期权均具有相同的到期日 t，而且除非特别说明，均具有相同的执行价 K. 请给出拥有以下资产的投资者在 t 时刻得到的回报：

a)拥有一个看涨期权和一个看跌期权；

b)拥有一个执行价为 K_1 的看涨期权，并已经卖出了一个执行价为 K_2 的看跌期权；

c)拥有两个看涨期权，并已经卖空了一股标的证券；

d)拥有一股标的证券，并已经卖出了一个看涨期权.

89

练习 5.21 证明一个欧式看涨期权的价格关于其敲定价是非增的.

练习 5.22 假设购买了一个执行价为100的看涨期权，同时卖出了一个以相同证券为标的证券、执行价为105的看涨期权，并且这两个期权具有相同的到期日.

a)这个投资初始的成本是正还是负？

b)将投资回报作为证券价格的函数，画出在期权到期日该函数的图形.

练习 5.23 考虑两个具有相同标的证券的看涨期权，该证券当前价格为110. 假设这两个期权具有相同的到期日，其中一个期权的敲定价为100，价格为20，而另一个的敲定价为110，价格为 C. 如果不存在套利机会，请给出 C 的下界.

练习 5.24 用 $P(K, t)$表示一个 t 时刻到期的、执行价为 K 的欧式看跌期

权的价格. 试证明对于固定的 t，$P(K, t)$是 K 的凸函数；或者解释这个论断为什么不一定成立.

练习 5.25 通过书中给出的关于一个看涨期权价格的证明，是否可以经过修改得出，一个美式看跌期权的价格是其执行价的凸函数?

练习 5.26 一个(K_1, t_1, K_2, t_2)双重看涨期权可以在 t_1 时刻以执行价 K_1 执行，也可以在 t_2 时刻($t_2>t_1$)以执行价 K_2 执行. 试证明，如果 $K_1>e^{-r(t_2-t_1)}K_2$，不会在 t_1 时刻执行该期权.

练习 5.27 在一个上限看涨期权中，回报被限定在一个预先指定的值 A. 这就是说，如果这个期权的敲定价为 K，到期日为 t，那么在 t 时刻它的回报是

$$\min(A,(S(t)-K)^+),$$

其中 $S(t)$是标的证券在 t 时刻的价格. 试证明，这样一个期权可以通过以下等价的途径来定义：即当这个看涨期权在 t 时刻执行时，令

$$\max(K,S(t)-A)$$

为其敲定价.

90

练习 5.28 试证明，只有当标的证券的价格至少为 $K+A$ 时，一个美式上限看涨期权才会被提前执行.

练习 5.29 一个函数 $f(x)$称为是凹的，如果对于所有的实数 x，y 和 $0<\lambda<1$，有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

a)请给出凹函数的几何解释；

b)试证明，$f(x)$是凹的当且仅当 $g(x)=-f(x)$是凸的.

练习 5.30 考虑两项投资，投资 $i(i=1, 2)$成本为 C_i，一年后收益为 X_i，其中 X_1 与 X_2 均为随机变量. 假定 $C_1>C_2$，下列结论正确吗?

a)如果 $E[X_1]<E[X_2]$，那么存在套利.

b)如果 $P\{X_2>X_1\}>0$，那么存在套利.

参考文献

[1] Cox, J., and M. Rubinstein (1985). *Options Markets*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[2] Merton, R. (1973). "Theory of Rational Option Pricing." *Bell Journal of Economics and Management Science* 4: 141—83.

[3] Samuelson, P., and R. Merton (1969). "A Complete Model of Warrant Pricing that Maximizes Utility." *Industrial Management Review* 10: 17—46.

[4] Stoll, H. R., and R. E. Whaley (1986). "New Option Intruments: Arbitrageable Linkages and Valuation." *Advances in Futures and Options Research* 1(part A): 25—62.

91



第6章 套利定理

6.1 套利定理

考虑一个试验，其所有可能结果的集合为{1，2，…，m}，现有 n 个不同的赌博与此试验相关. 假设我们在第 i 个赌博中投入了 x 单位的赌金，若试验结果是 $j(j=1，\cdots，m)$，可以得到收益 $xr_i(j)$，其中 $r_i(\cdot)$是在第 i 个赌博上投入 1 个单位赌金的收益函数. 投入的赌金数量可以是正的、负的或者是零.

向量 $\boldsymbol{x}=(x_1，x_2，\cdots，x_n)$称为赌博策略，其中 x_1 表示有 x_1 个单位的赌金投在赌博 1 上，x_2 表示有 x_2 个单位的赌金投在赌博 2 上，…，x_n 表示有 x_n 个单位的赌金投在赌博 n 上. 如果试验的结果是 j，那么由策略 $\boldsymbol{x}$ 得到的收益可由下式表示：

$$\boldsymbol{x}\text{ 的收益} = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i(j).$$

下面的结果称为*套利定理*，它表明，在试验的所有可能结果所构成的集合上，要么存在一个概率向量 $\boldsymbol{p}=(p_1，p_2，\cdots，p_m)$，使得在这个概率下每一种赌博的期望收益均为零；要么存在一个赌博策略，在这个策略下对于试验的任何一种结果都会得到正的收益.

定理 6.1.1(套利定理) *下面结论只有一个是正确的，即或*

a)存在一个概率向量 $\boldsymbol{p}=(p_1，p_2，\cdots，p_m)$*使得*

$$\sum_{j=1}^{m} p_j r_i(j) = 0, \quad \text{对所有 } i = 1,\cdots,n,$$

或

b)存在一个赌博策略 $\boldsymbol{x}=(x_1，x_2，\cdots，x_n)$*使得*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i r_i(j) > 0, \quad \text{对所有 } j = 1,\cdots,m.$$

证明：见 6.3 节.

如果试验的结果是 X，那么套利定理表明：或存在一个概率的集合(p_1，p_2，…，p_m)，使得当

$$P\{X = j\} = p_j, \quad \text{对所有 } j = 1,\cdots,m$$

时有

$$E[r_i(X)] = 0, \quad \text{对所有 } i = 1,\cdots,n,$$

或存在一个稳赢的赌博策略. 换句话说，在试验的可能结果集上如果不存在一个概率向量，使得在这个概率下所有的赌博都是公平的，那么就一定存在一个能够

92

稳赢的赌博策略.

定义 定义在试验的可能结果集合上的一个概率测度，如果它使得所有的赌博都是公平的，那么这个概率测度称为风险中性测度.

例 6.1a 在某些情况下，第 i 次赌博仅有一个结果 $i(i=1, \cdots, m)$供选择，这样一个赌博的收益通常用赔率来表示. 如果关于结果 i 的赔率是 o_i(通常表示为"o_i 比 1")，那么当试验的结果是 i 时，1 个单位的赌金会收益 o_i，而当结果不是 i 时收益则会是-1. 也就是说，押在 i 上的 1 个单位的赌金或者赢得 o_i 或者损失掉 1. 这个赌博的收益函数可由下式给出：

$$r_i(j) = \begin{cases} o_i & 若 j = i, \\ -1 & 若 j \neq i. \end{cases}$$

假设有赔率 o_1，o_2，$\cdots$，o_m，为了使得不存在一个稳赢的策略，那么就一定要存在一个概率向量 $\boldsymbol{p}=(p_1, p_2, \cdots, p_m)$，使得在这个概率下对每一个 i，都有

93

$$0 = E_{\boldsymbol{p}}[r_i(X)] = o_i p_i - (1 - p_i).$$

也就是说，必须有

$$p_i = \frac{1}{1 + o_i}.$$

由于所有 p_i 的和必须为 1，这就意味着不存在套利的条件是

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{1 + o_i} = 1.$$

换句话说就是，如果 $\sum_{i=1}^{m}(1 + o_i)^{-1} \neq 1$,那么存在稳赢策略是可能的 . 例如，假设共有三种可能的结果，且其投注赔率由下表给出：

结果	赔率
1	1
2	2
3	3

由上表可知，结果 1 的赔率是 1 比 1；结果 2 的赔率是 2 比 1；结果 3 的赔率是 3 比 1. 由于

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} \neq 1,$$

故稳赢是可能的. 一种可能的策略是：在结果 1 上押-1 个单位的赌金(那么当结果不是 1 的时候能赢得 1，而当结果是 1 的时候则会输掉 1)，在结果 2 上押

-0.7 个单位的赌金(当结果不是 2 的时候能赢得 0.7，而当结果是 2 的时候则会输掉 1.4)，在结果 3 上押 -0.5 个单位的赌金(那么当结果不是 3 的时候能赢得 0.5，而当结果是 3 的时候则会输掉 1.5). 这样如果试验的结果是 1，能赢得 $-1+0.7+0.5=0.2$；如果结果是 2，能赢得 $1-1.4+0.5=0.1$；结果是 3 时能赢 $1+0.7-1.5=0.2$. 因此，无论何种情形都会有一个正的收益. □

例 6.1b 再次考虑 5.1 节中期权定价的例子. 在那个例子中，股票的初始价格是 100 并且假设一段时间后股票的价格只可能是 200 或者 50. 如果在 0 时刻能以每股 C 的价格买入一个期权，这个期权在时刻 1 能以每股 150 的价格购买股票，那么当 C 的值为多少时稳赢的赌博不可能存在？ 94

解：在本节中，试验的结果是时刻 1 时的股票价格，因此，有两种可能的结果. 与此同时也存在两种不同的赌博：买(或者卖)股票和买(或者卖)期权. 由套利定理我们知道，如果在结果集上存在概率 $(p, 1-p)$ 使得这两种赌博的期望收益现值都为零，那么就不会有稳赢的情况出现.

购买一股该股票收益的现值为：

$$\text{收益}=\begin{cases}200(1+r)^{-1}-100 & \text{如果在时刻 1 时的价格是 200,}\\ 50(1+r)^{-1}-100 & \text{如果在时刻 1 时的价格是 50.}\end{cases}$$

因此，若在时刻 1 时股票价格是 200 的概率为 p，那么

$$\begin{aligned}E[\text{收益}]&=p\left[\frac{200}{1+r}-100\right]+(1-p)\left[\frac{50}{1+r}-100\right]\\&=p\frac{150}{1+r}+\frac{50}{1+r}-100.\end{aligned}$$

令这个式子等于零，有

$$p=\frac{1+2r}{3}.$$

由此可见，若赌博为购买股票，那么使得该赌博的期望收益是零的概率向量 $(p, 1-p)$ 只可能是 $p=(1+2r)/3$.

此外，购买一个期权收益的现值为：

$$\text{收益}=\begin{cases}50(1+r)^{-1}-C & \text{如果在时刻 1 时的价格是 200,}\\ -C & \text{如果在时刻 1 时的价格是 50.}\end{cases}$$

因此，当 $p=(1+2r)/3$ 时，购买一个期权的期望收益是：

$$E[\text{收益}]=\frac{1+2r}{3}\frac{50}{1+r}-C.$$

根据套利定理，就得到了不存在稳赢策略时 C 的唯一值是：

$$C=\frac{1+2r}{3}\frac{50}{1+r};$$

即

$$C=\frac{50+100r}{3(1+r)},$$

95 这里得到的结果与 5.1 节中的结果是一致的. □

6.2 多期二叉树模型

现在考虑一个有 n 个交易时间段的股票期权，仍设每一个时间段的名义利率均为 r. 令 $S(0)$表示初始时刻股票的价格，$S(i)$表示股票在此后第 i 个时间段的价格，其中 $i=1$，…，n. 我们假设 $S(i)$的取值只可能是 $uS(i-1)$或者 $dS(i-1)$，其中 $d<1+r<u$. 这就是说，从一个时间段变化到下一个时间段时，股票的价格要么上升为原来的 u 倍，要么下降为原来的 d 倍. 此外，还假设在 0 时刻我们可以购买一个期权，这个期权使得我们能在 n 个时间段后可以以价格 K 购买股票，且假设股票能在这 n 个时间段的任何一个时间段买进或者卖出.

如果第 i 个时间段的股票价格上升到第 $i-1$ 个时间段股票价格的 u 倍，我们就令 X_i 等于 1，相反如果价格下降为原来的 d 倍我们就令它等于 0，也就是：

$$X_i=\begin{cases}1 & 若\ S(i)=uS(i-1),\\ 0 & 若\ S(i)=dS(i-1).\end{cases}$$

现在我们可以把试验结果看作是向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的值. 由套利定理知道，为了不存在套利机会，在这个结果集上必须存在一个使得所有的赌博都是公平的概率测度. 即一定存在一个概率的集合

$$P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\},\quad x_i=0,1,\quad i=1,\cdots,n,$$

使得所有的赌博都是公平的.

现在考虑下面这种类型的赌博：首先选定一个 $i(i=1, \cdots, n)$的值和一个向量$(x_1, \cdots, x_{i-1})$，该向量的每一个元素取值为 0 或 1. 然后观察前 $i-1$ 个时间段股价的变化. 如果对每一个 $j=1$，…，$i-1$ 都有 $X_j=x_j$，那么就立刻购买一个单位的股票然后在下一个时间段将其卖出. 假设已经购买了股票，则在时刻 $i-1$ 它的价值就是 $S(i-1)$；如果在时刻 i 把它卖出，并且把所得的价值折现到时刻 $i-1$，那么当股票价格上涨时这个值就是$(1+r)^{-1}uS(i-1)$，下跌时是$(1+r)^{-1}dS(i-1)$. 因此，若令

$$\alpha=P\{X_1=x_1,\cdots,X_{i-1}=x_{i-1}\}$$

表示股票被购买的概率，并且令

96

$$p=P\{X_i=1\mid X_1=x_1,\cdots,X_{i-1}=x_{i-1}\}$$

表示一只股票在下一个时间段价格上涨的概率，那么这种赌博的期望收益(在时刻$i-1$ 的值)为

$$\alpha[p(1+r)^{-1}uS(i-1)+(1-p)(1+r)^{-1}dS(i-1)-S(i-1)].$$

于是，要使得这个赌博的期望收益是 0，就必须有

$$\frac{pu}{1+r}+\frac{(1-p)d}{1+r}=1,$$

或者，等价地

$$p=\frac{1+r-d}{u-d}.$$

这意味着，能够使得这个赌博的期望收益是 0 的概率必须满足下面的条件：

$$P\{X_i=1\mid X_1=x_1,\cdots,X_{i-1}=x_{i-1}\}=\frac{1+r-d}{u-d}.$$

由于 x_1，…，x_n 都是任意取的，可以由此推知：使得所有的赌博都公平的概率只可能是这样一个概率：它使得 X_1，…，X_n 为相互独立的随机变量，并且有

$$P\{X_i=1\}=p=1-P\{X_i=0\},\quad i=1,\cdots,n, \tag{6-1}$$

其中

$$p=\frac{1+r-d}{u-d}. \tag{6-2}$$

可以证明在这样的概率下，任何购买股票的赌博都会有期望值为零的收益．因此由套利定理，期权的价格必须等于在上述概率下的期望收益在当前(即在 0 时刻)的价值，否则就会有套利机会出现．为了得到无套利价格，假设 X_i 是取值为 0 或 1 的相互独立的随机变量，而且它们等于 1 的概率都是由等式(6-2)给出的 p．令 Y 表示所有 X_i 的和，那么 Y 的值就是 X_i 等于 1 的个数，因此 Y 是一个参数为 n 和 p 的二项分布随机变量．现在，从一个时间段变化到下一个时间段，股票的价格等于原来的价格乘上 u 或者 d．在时刻 n，股票的价格已经上涨了 Y 次并且下跌了 $n-Y$ 次，所以 n 个时间段后股票的价格可以表示为 [97]

$$S(n)=u^Yd^{n-Y}S(0),$$

其中 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$，这是一个参数为 n 和 p 的二项分布随机变量．如果购买了期权，那么 n 个时间段后这个期权的价值就是 $(S_n-K)^+$，这个符号表示等于 S_n-K(当 S_n-K 非负的时候)或 0(当 S_n-K 是负数的时候)．因此，这个期权当前(0 时刻)的价值为

$$(1+r)^{-n}(S(n)-K)^+,$$

期权现值的期望值是

$$(1+r)^{-n}E[(S(n)-K)^+]=(1+r)^{-n}E[(S(0)u^Yd^{n-Y}-K)^+].$$

由此可知，不会导致套利存在的期权价格 C 的唯一值为

$$C=(1+r)^{-n}E[(S(0)u^Yd^{n-Y}-K)^+]. \tag{6-3}$$

注 为了计算方便，可以把等式(6-3)进行简化．但要在期权标的证券服从几何布朗运动假设下，决定该期权唯一的无套利价格，等式(6-3)的表达形式就不用化简了．在下一章中我们将由它推导出著名的 Black-Scholes 公式．

6.3 套利定理的证明

为了证明套利定理，首先考虑下面线性规划中的对偶定理．假设对于给定的常数 c_i，b_j，$a_{i,j}(i=1, \cdots, n, j=1, \cdots, m)$，要选择合适的 x_1，…，x_n 值使得

$$\text{最大化} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

98

$$\text{在} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_i \leqslant b_j, \quad j = 1,2,\cdots,m \text{ 条件下.}$$

这个问题称为线性规划原问题．每一个线性规划原问题都有一个对偶问题，上面这个线性规划原问题的对偶问题就是选择 y_1，…，y_m 的适当的值，使得

$$\text{最小化} \sum_{j=1}^{m} b_j y_j$$

$$\text{在} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} y_j = c_i, \quad i = 1,\cdots,n,$$

$$y_j \geqslant 0, \quad j = 1,\cdots,m \text{ 条件下.}$$

对于一个线性规划问题，如果存在适当的变量值(在线性规划原问题里是x_1，…，x_n，在对偶问题里是 y_1，…，y_m)满足约束条件，那么这个线性规划就称为可行的．下面引用的是线性规划中的一个重要结果，即对偶定理，这里将略去其证明．

命题 6.3.1(线性规划对偶定理) 如果一个线性规划原问题及其对偶问题都是可行的，那么它们都有最优解并且原问题的最大值等于其对偶问题的最小值．如果这两个问题中的任何一个是不可行的，那么另外一个不存在最优解．

对偶定理的一个结论就是套利定理．回忆一下，套利定理指的是这样的情形：存在一个试验，这个试验可能的结果是 1，2，…，m，关于这个试验有 n 种不同的赌博，而每种赌博的收益是由试验的结果来决定的．特别地，如果你在第 i 种赌博上押了 x 个单位的赌金，那么当试验的结果是 j 的时候你总共能够赢得 $xr_i(j)$．赌博策略是向量 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$，其中每一个 x_i 可以是正的或者负的(或者是 0)，它表示对于每一个 $i=1$，…，n 你同时在第 i 个赌博上押了 x_i 个单位的金额．若试验的结果是 j 你就能够从这个赌博策略中赢得

$$\sum_{i=1}^{n} x_i r_i(j).$$

命题 6.3.2(套利定理) 下面的命题只有一个是正确的，或

ⅰ)存在一个概率向量 $\boldsymbol{p}=(p_1, p_2, \cdots, p_m)$使得

$$\sum_{j=1}^{m} p_j r_i(j) = 0, \quad 对所有\ i = 1,\cdots,n;$$

或

ⅱ)存在一个赌博策略 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$使得

$$\sum_{i=1}^{n} x_i r_i(j) > 0, \quad 对所有\ j = 1,\cdots,m.$$

该定理表明，一定存在一个概率向量，在这个概率下所有赌注的期望收益都等于0，否则就存在一个总是能够获得正收益的赌博策略.

99

证明：令 x_{n+1}表示一个赌博者确信稳赢的金额，并且考虑使得这个数额达到最大. 如果该赌博者使用的赌博策略是$(x_1, \cdots, x_n)$，那么当实验结果为 j 时，他就能够赢得$\sum_{i=1}^{n} x_i r_i(j)$. 因此，他将选择赌博策略$(x_1, \cdots, x_n)$和 x_{n+1}以使得

$$最大化\ x_{n+1}$$

$$在\sum_{i=1}^{n} x_i r_i(j) \geqslant x_{n+1}, \quad j = 1,\cdots,m\ 条件下.$$

令

$$a_{i,j} = - r_i(j), \quad i = 1,\cdots,n, \quad a_{n+1,j} = 1,$$

可以把上面的线性规划重新写为下面的形式：

$$最大化\ x_{n+1}$$

$$在\sum_{i=1}^{n+1} a_{i,j} x_i \leqslant 0, \quad j = 1,\cdots,m\ 条件下.$$

注意到在上面的线性规划问题中 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$，$c_{n+1} = 1$，并且约束值的上限都等于0(即所有的 $b_j = 0$). 因此，它的对偶问题就是选择变量 $y_1, \cdots, y_m$使得

100

$$最小化\ 0$$

$$在\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} y_j = 0, \quad i = 1,\cdots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{n+1,j} y_j = 1,$$

$$y_j \geqslant 0, \quad j = 1,\cdots,m\ 条件下.$$

由 $a_{i,j}$的定义，这个对偶线性规划问题可以表示为

$$最小化\ 0$$

$$\text{在}\sum_{j=1}^{m} r_i(j) y_j = 0, \quad i = 1,\cdots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1,$$

$$y_j \geqslant 0, \quad j = 1,\cdots,m \text{ 条件下.}$$

注意到这个对偶问题是可行的并且其最小值是 0 当且仅当存在一个概率向量 $(y_1, \cdots, y_m)$，在这个概率下所有赌博的期望收益都为 0. 上述线性规划原问题也是可行的，这是因为 $x_i=0(i=1, \cdots, n+1)$满足它的约束条件. 所以由对偶定理，如果对偶问题是可行的，那么原问题的最优值是 0，因此稳赢是不可能的. 另一方面，如果对偶问题是不可行的，那么由对偶定理可知原问题也不存在最优解. 这就意味着 0 不是最优解，因此就存在一个最小收益为正的赌博策略. (当对偶问题不可行时原问题不存在最优解，其原因是此时原问题是无界的. 也就是说，如果一个赌博策略 $\boldsymbol{x}$ 有保证的收益至少为 $v>0$，那么 $c\boldsymbol{x}$ 有保证的收益则至少为 cv.) □

101

6.4 习题

练习 6.1 考虑一个试验，它有三种可能的结果，这三种结果以及相应投注赔率如下表所示：

结果	赔率
1	1
2	2
3	5

请问此试验存在一个稳赢的赌博策略吗?

练习 6.2 考虑一个试验，它有四种可能结果，前三种可能结果的投注赔率如下表所示：

结果	赔率
1	2
2	3
3	4

当允许赌任何一个结果出现或者不出现的时候，如果要使得套利不存在，那么关于结果 4 的投注赔率必须是多少?

练习 6.3 一个试验的可能结果是 1，2，3.

a)如果有两种不同的赌博，

$$r_1(1) = 4, \quad r_1(2) = 8, \quad r_1(3) = -10$$

$$r_2(1) = 6, \quad r_2(2) = 12, \quad r_2(3) = -16$$

有套利存在吗？

b)如果有三种不同的赌博，

$$r_1(1)=6,\quad r_1(2)=-3,\quad r_1(3)=0$$
$$r_2(1)=-2,\quad r_2(2)=0,\quad r_2(3)=6$$
$$r_3(1)=10,\quad r_3(2)=10,\quad r_3(3)=x$$

102

要使得没有套利，x 必须是多少？在 a)与 b)中都假定可以同时玩不同赔率的赌博.

练习 6.4 假设在练习6.1中，一个人也可以选择任何一对结果 $i\neq j$ 并且结果要么是 i 要么是 j. 如果要避免套利机会的出现，这三个赌博的投注赔率应该各是多少？

练习 6.5 在例6.1a 中，证明如果有

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{1+o_i}\neq 1,$$

那么下面的赌博策略

$$x_i=\frac{(1+o_i)^{-1}}{1-\sum_{i=1}^{m}(1+o_i)^{-1}}\quad(i=1,\cdots,m)$$

会赢得价值为 1 的收益.

练习 6.6 在例6.1b 中，假设可以选择购买看跌期权，这个期权的持有者有权利选择是否在一个时间段结束的时候以每股 150 的价格卖出该股票. 求使得套利机会不存在时这个看跌期权的价格 P；然后证明所得结果的看涨和看跌期权价格满足期权平价公式(见命题5.2.2).

练习 6.7 假设在每一个时间段内，一个证券的价值或者上涨为原来的两倍或者下跌为原来的二分之一(即 $u=2$，$d=1/2$). 如果该证券的初始价格为100，求一个看涨期权的无套利价格，这个期权允许持有者在两个时间段结束时以每股150的价格购买股票.

练习 6.8 假设在例6.1b中，在时刻 1 该证券有三种可能的价格：50，100，200.（这表明该证券的价格有可能会保持不变.）根据套利定理确定一个区间，当 C 落在这个区间时不会有套利出现.

如果一个赌博策略满足(沿用 6.1 节中的记号)

$$\sum_{i=1}^{n}x_i r_i(j)\geqslant 0,\quad j=1,\cdots,m,$$

103

并且有至少一个 j 使得不等号严格成立，这样的策略称为*弱套利策略*. 也就是说，套利是指在任何结果出现时都会有正收益的策略，而弱套利是指不会导致任何损失并且至少一种结果有正收益的策略.（可以把套利看成是*免费的午餐*，而把弱套利看成是*免费的彩票*.）可以证明弱套利不存在的条件当且仅当存在一个概

率向量 p，它的所有元素都是正的，并且使得

$$\sum_{j=1}^{m} p_j r_i(j) = 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

换句话说，如果存在一个概率向量，在这个向量里每一个可能结果的权重都是正的，并且它使得所有的赌博都是公平的，那么弱套利就不存在.

练习 6.9 在练习6.8中，证明若期权的价格等于所决定的区间的任何一个端点，那么弱套利就可能存在.

练习 6.10 在6.2节的模型中取 $n=1$，如何利用购买和卖空该证券来复制期权?

练习 6.11 假设证券在任何一个时间段的价格都是它在上一个时间段的价格乘上 $u=1.25$ 或者乘上 $d=0.8$，并且该证券的初始价格为100. 考虑下面"特殊"的欧式看涨期权，这个期权在五个时间段后交割，其交割价为100. 这个期权的特殊之处在于，它只有在两个时间段后证券价格严格低于100时才会有效. 也就是说，只有在前两个时间段价格下降的条件下该期权才会生效. 这个期权最终的收益是

$$\text{在时刻 5 的收益} = I(S(5) - 100)^+,$$

其中当 $S(2)<100$ 时 $I=1$，当 $S(2)\geqslant 100$ 时 $I=0$. 假设每个时间段内的利率是 $r=0.1$.

a)求该期权的无套利价格(在时刻 0).

[104] b)问题 a)中的价格是唯一的吗? 给出简要证明.

c)如果每一次价格变化时价格上升或下降的概率都是相同的，那么该期权持有者在期权到期日的期望收益是多少?

练习 6.12 某证券在 0 时刻的价格为 50，其每期的价格变化为：第 i 期的价格等于第 $i-1$ 期的价格或乘 $u=1.1$，或乘 $d=1/u$，$i\geqslant 1$. 除了买卖证券外，假定可以在第 0 期以成本 C 购买以下权利：如果在第三期证券价格不低于 52，则获利 100，如果在第三期证券价格低于 52，则获利 0. 已知利率 $r=0.05$，求无套利的 C 值.

参考文献

[1] De Finetti, Bruno (1937). "La prevision: see lois logiques, ses sources subjectives." *Annales de l'Institut Henri Poincaré* 7: 1—68; English translation in S. Kyburg (Ed.) (1962), *Studies in Subjective Probability*, pp. 93—158. New York: Wiley.

[105] [2] Gale, David(1960). *The Theory of Linear Economic Models*. New York: McGraw-Hill.

第 7 章　Black-Scholes 公式

7.1　引言

在这一章里，将推导著名的 Black-Scholes 公式. 在假定证券价格服从几何布朗运动的前提下，该公式给出了关于这种证券看涨期权的唯一无套利价格. 在 7.2 节中将给出作为 5 个变量函数的无套利价格的推导过程；在 7.3 节中讨论此价格函数的一些性质；若期权的实际价格不等于由该公式决定的价格，在 7.4 节中将会给出一种投资策略，通过它从理论上就会得到套利机会；7.5 节比本章的其他节理论性更强些，在这节中将用更简单的方法推导出下面的结果：1)Black-Scholes 公式的计算形式；2)无套利价格函数关于其 5 个参数的偏导数.

7.2　Black-Scholes 公式

考虑一个交割价为 K、到期日是 t 的看涨期权，这个期权允许它的持有者在时刻 t 以价格 K 购买一个单位的标的证券. 进一步假设名义利率是连续复利利率 r，而且这种证券的价格过程服从漂移参数为 μ、波动参数为 σ 的几何布朗运动. 在这些假设条件下，能够得到上述期权的唯一无套利价格.

首先，令 $S(y)$表示标的证券在时刻 y 时的价格. 由于$\{S(y),\ 0\leqslant y\leqslant t\}$服从漂移参数为 μ、波动参数为 σ 的几何布朗运动，作为该模型的 n 阶近似，可假设每过 t/n 个单位的时间，证券的价格就会变化一次；它的新价格或者等于旧价格乘以因子

$$u = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{t/n}},\quad 概率为\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{t/n}\right)$$

或者等于旧价格乘以

$$d = \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{t/n}},\quad 概率为\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{t/n}\right).$$

因此，这个 n 阶近似模型就是一个 n 期的二叉树模型. 这个二叉树模型里每一个时间段 t/n 后的价格要么上涨为原来的价格乘上系数 u，要么下跌为原来的价格乘上系数 d. 所以，如果令

$$X_i = \begin{cases}1 & 若\ S(it/n) = uS((i-1)t/n),\\ 0 & 若\ S(it/n) = dS((i-1)t/n),\end{cases}$$

那么由 6.2 节的结果可以看到，在这个 n 期近似模型里，唯一能够使得所有购买这种证券的赌博都公平的概率，就是使得 X_i 相互独立的概率，并且有

$$p\equiv P\{X_i = 1\}$$

$$= \frac{1+rt/n-d}{u-d}$$

$$= \frac{1-e^{-\sigma\sqrt{t/n}}+rt/n}{e^{\sigma\sqrt{t/n}}-e^{-\sigma\sqrt{t/n}}}.$$

利用函数 e^x 在 0 点的三阶泰勒展开式

$$e^{-\sigma\sqrt{t/n}} \approx 1-\sigma\sqrt{t/n}+\sigma^2 t/2n,$$
$$e^{\sigma\sqrt{t/n}} \approx 1+\sigma\sqrt{t/n}+\sigma^2 t/2n,$$

得到

$$p \approx \frac{\sigma\sqrt{t/n}-\sigma^2 t/2n+rt/n}{2\sigma\sqrt{t/n}}$$
$$= \frac{1}{2}+\frac{r\sqrt{t/n}}{2\sigma}-\frac{\sigma\sqrt{t/n}}{4}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{r-\sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{t/n}\right).$$

这就是说，在 n 期近似模型里唯一的风险中性测度是基于下面的假设得到的：在每一个时间段，证券价格要么以概率 p 上涨为原来的 $e^{\sigma\sqrt{t/n}}$ 倍，要么以概率 $1-p$ 下跌为原来的 $e^{-\sigma\sqrt{t/n}}$ 倍. 但是，由 3.2 节知道，当 $n\to\infty$ 时，这个风险中性分布收敛到一个漂移参数为 $r-\sigma^2/2$，波动参数为 σ 的几何布朗运动的分布. 故随着 n 越来越大，n 阶近似模型就越来越接近几何布朗运动，于是有理由假设(这是可以严格证明的)，这个风险中性的几何布朗运动分布，是所有描述证券价格随时间变化规律的分布中，唯一一个能够使得将所有关于证券的买卖视为赌博时，它们都公平的概率分布(换句话说，如果标的证券的价格服从一个波动参数是 σ 的几何布朗运动，那么关于价格序列的分布律中，唯一一个能够使得对所有购买证券的赌博都公平的概率分布是漂移参数为 $r-\sigma^2/2$、波动参数为 σ 的几何布朗运动的分布). 因此，根据套利定理，期权要么根据风险中性几何布朗运动的概率分布来定价从而使得赌博公平，要么存在套利机会.

现在，在风险中性几何布朗运动下，$S(t)/S(0)$是一个均值参数为$(r-\sigma^2/2)t$，方差参数为 $\sigma^2 t$ 的对数正态随机变量. 因此，如果有这样的一个看涨期权，它允许持有者在时刻 t 以事先确定的价格 K 购买该证券，那么此期权唯一的无套利价格 C 是

$$C = e^{-rt}E[(S(t)-K)^+]$$
$$= e^{-rt}E[(S(0)e^W-K)^+], \tag{7-1}$$

其中 W 是一个均值参数为$(r-\sigma^2/2)t$、方差参数为 $\sigma^2 t$ 的正态随机变量.

等式(7-1)的右边可以用下面的表达式精确地表示出来(推导见 7.4 节)，这就是著名的 Black-Scholes 期权定价公式：

$$C = S(0)\Phi(\omega)-Ke^{-rt}\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t}), \tag{7-2}$$

其中

$$\omega=\frac{rt+\sigma^2t/2-\log(K/S(0))}{\sigma\sqrt{t}},$$

而 $\Phi(x)$是标准正态分布函数.

例 7.2a 假设一个证券现在的售价是 30，名义利率是 8%(单位时间为一年)，这种证券的波动率是 0.20. 求一个三个月后到期且执行价为 34 的看涨期权的无套利价格. 108

解：本题中的参数是：

$$t=0.25,\quad r=0.08,\quad \sigma=0.20,\quad K=34,\quad S(0)=30,$$

所以有

$$\omega=\frac{0.02+0.005-\log(34/30)}{(0.2)(0.5)}\approx -1.0016.$$

由此得到

$$\begin{aligned}C&=30\Phi(-1.0016)-34e^{-0.02}\Phi(-1.1016)\\&=30(0.15827)-34(0.9802)(0.13532)\\&\approx 0.2383.\end{aligned}$$

这个期权合适的价格大约是 24 美分. □

注 1)也可以这样推导期权的无套利价格 C：首先在 n 期近似模型下考虑期权唯一的无套利价格，然后再令 n 趋向于无穷大.

2)当一个证券的初始价格为 s 时，令 $C(s, t, K)$表示到期日是 t、执行价是 K 的期权的无套利价格. 也就是说，$C(s, t, K)$就是当 $S(0)=s$ 时由 Black-Scholes 期权定价公式所计算出的 C. 如果在时刻 y，标的证券的价格是 $S(y)=s_y$，那么 $C(s_y, t-y, K)$就是期权在时刻 y 时唯一的无套利价格. 这是因为，在时刻 y，期权会在经过时间 $t-y$ 后以相同的执行价 K 到期，并且在下面 $t-y$ 个单位时间内该证券仍然会服从初始价值为 s_y 的几何布朗运动.

3)由命题 5.2.2 的看涨-看跌期权平价公式，可以获得标的证券初始价格为 s，执行价为 K，到期日是 t 的欧式看跌期权的无套利价格计算公式. 记此价格为 $P(s, t, K)$，那么它可由下式给出：

$$P(s,t,K)=C(s,t,K)+Ke^{-rt}-s,$$

其中 $C(s, t, K)$是关于同一个证券看涨期权的无套利价格. 109

4)由于风险中性几何布朗运动仅依赖于 σ 的变化，而不依赖于 μ，所以期权的无套利价格仅依赖于布朗运动的波动参数 σ，而与漂移参数无关.

5）如果假定证券价格服从的几何布朗运动分布的波动率σ固定不变，而漂移参数是随时间变化的，那么期权的无套利价格也是不变的．这是因为，尽管在时刻t之前价格的漂移参数是随时间变化的，但n期近似模型仍是一个二叉树模型，价格要么上涨为原来的$u=e^{\sigma\sqrt{t/n}}$倍，要么下跌为原来的$d=e^{-\sigma\sqrt{t/n}}$倍，所以它唯一的风险中性分布与漂移参数为常数时是一样的，由此能够得到相同的期权无套利价格．（漂移参数随时间变化对推导 Black-Scholes 期权定价公式唯一的影响是它会导致在不同的时间段内价格上涨的概率不同，但这不会影响风险中性概率的大小．）

7.3 Black-Scholes 期权定价公式的一些性质

无套利期权定价公式$C=C(s, t, K, \sigma, r)$是一个含有下面五个变量的函数：证券的初始价格s；期权到期日t；执行价K；证券的波动参数σ和利率r．下面进一步研究期权价格作为这些变量的函数所具有的性质，由等式(7-1)有

$$C(s,t,K,\sigma,r)=e^{-rt}E[(se^{W}-K)^{+}],$$

其中W是一个均值为$(r-\sigma^2/2)t$、方差为$\sigma^2 t$的正态随机变量．

$C=C(s, t, K, \sigma, r)$的性质

1）C是关于s的单调递增凸函数．

也就是说，如果其他四个变量保持不变的话，那么期权的无套利价格是关于证券初始价格的一个单调递增凸函数．这两个结果（其中第一个单调性的结果是非常直观的）可由等式(7-1)推得．首先注意到（见图 7-1），对任意一个正的常数a，函数$e^{-rt}(sa-K)^{+}$关于变量s是一个单调递增凸函数．又因为W的概率分布不依赖于s的变化，所以对W的任一取值，$e^{-rt}(se^{W}-K)^{+}$关于s单调递增并且是凸的，因此它的期望值也是关于s的一个递增凸函数．

110

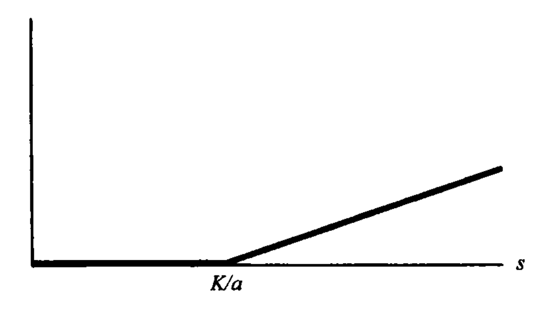


图 7-1 递增凸函数$f(s)=e^{-rt}(sa-K)^{+}$

2）C是关于K的单调递减凸函数．

这个结论可以由下面的事实得到：对W的任一取值，$e^{-rt}(se^{W}-K)^{+}$关于K

是单调递减并且是凸的(见图 7-2)，因此它的期望也是关于 K 的一个递减凸函数.（此结果与 5.2 节的一般性套利理论结论一致，那里没有对证券的价格模型进行任何假设.）

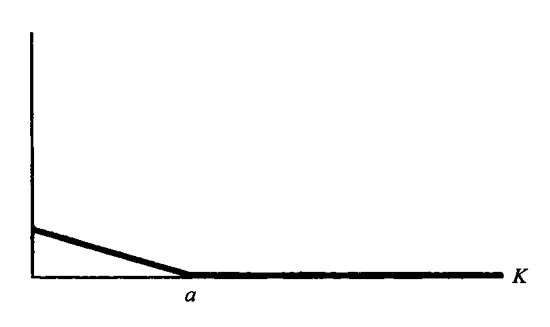


图 7-2 递减凸函数 $f(K)=e^{-rt}(a-K)^+$

3)*C 关于 t 是单调递增的.*

尽管可以用数学的方法得到这个结果(见 7.4 节)，但是通过下面这种更简单、更直观的观察可以立刻得到结论：注意到，如果这是一个美式看涨期权，那么它的价格会随着 t 的增加而增加(无论怎样延长到期日都不会产生负面的影响，这是因为期权的持有者总是可以选择不去理会它). 又由于欧式看涨期权的价格和美式看涨期权的价格相同(见命题 5.2.1)，所以结论就是显而易见的了.

111

4)*C 关于 σ 是单调递增的.*

注意，证券的价格在到期日下跌到执行价以下再多也不会给期权持有者造成更多的损失，但是如果届时此价格很高的话，期权的持有者会获得很大的利润，所以这个结论看起来是非常直观的. 然而，事实上它比表面上看起来要更复杂，这是因为 σ 的增加不仅导致在风险中性概率下，最终价格取对数之后的方差会增加，而且会导致它的期望值减少(因为 $E[\log(S(t)/S(0))]=(r-\sigma^2/2)t$). 尽管这样，这个结论还是正确的，在后面的 7.4 节中将会给出它的数学证明.

5)*C 关于 r 是单调递增的.*

为证明这个性质，首先注意到可以把一个均值为 $(r-\sigma^2/2)t$，方差为 $\sigma^2 t$ 的正态随机变量 W 写成下面的形式：

$$W = rt - \sigma^2 t/2 + \sigma\sqrt{t}Z,$$

其中 Z 是一个均值为 0、方差为 1 的标准正态随机变量. 因此，由等式(7-1)有

$$C = E[(se^{-\sigma^2 t/2+\sigma\sqrt{t}Z} - Ke^{-rt})^+].$$

由于 $(se^{-\sigma^2 t/2+\sigma\sqrt{t}Z} - Ke^{-rt})^+$ 关于 r 是单调递增的，所以它的期望值关于 r 也是单调递增的，这样就得到了所要的结论. 也可以通过前面的讨论得到这个结论，在无套利几何布朗运动模型中，增加利率所产生的唯一影响就是它降低了期权交割时所付金额的当前价值，因此也就增加了期权的价格.

看涨期权的价格变化与其标的证券的价格变化的比率称为 delta，记为 Δ. 确切地，如果 $C(s, t, K, \sigma, r)$是由 Black-Scholes 期权定价公式得到的期权价格，那么 Δ 就是它关于 s 的偏导数，即

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial s} C(s,t,K,\sigma,r).$$

112

在 7.4 节中将证明

$$\Delta = \Phi(\omega),$$

其中，与等式(7-2)中一样，

$$\omega = \frac{rt + \sigma^2 t/2 - \log(K/S(0))}{\sigma\sqrt{t}}.$$

delta 可以用来构造投资组合以对冲风险. 例如，假设投资者感觉一个看涨期权的价值被低估了并且因此购买了这个期权，那么为了保护他自己免受因期权价格下降而产生的影响，可以同时卖空一定数量的该种证券. 为了决定究竟应该卖出多少股这种证券，注意到如果证券的价格下降一个很小的数量 h，那么期权的价值就会下降 $h\Delta$ 这么多. 这也就意味着，如果这个投资者卖空了 Δ 股该证券的话，那么他的损失就可以得到弥补. 因此，一个合理的对冲策略应该是每买入一个期权就卖空 Δ 股该证券. 在下一节将精确地表述这个有启发性的结论，也就是 delta 对冲套利策略——在理论上，当一个看涨期权的价格与由 Black-Scholes 期权定价公式得到的价格不一致时，这个策略就可以用来制造套利机会.

7.4 delta 对冲套利策略

在本节中将证明如何用一个固定的初始支付(它可以分为初始购买一定的股份和初始的银行存款两种，而且每一种都可以是负的)和连续的资金调整来复制一个期权的回报. 首先在有限期近似模型中对其加以说明，再扩展到证券价格服从几何布朗运动情形.

假定一个证券的初始价格为 s，一期后，其价格或变为 us，或变为 ds. 现考虑一项基于此证券的支付，使得当证券价格变为 us 时，支付额为 a；当证券价格变为 ds 时，支付额为 b. 确定在时刻 0 的投资数 x，以实现 1 时刻的支付. 假设已买了 y 股股票并在 $x-ys\geqslant 0$ 时把剩余的钱 $x-ys$ 存入银行；在 $x-ys<0$ 时从银行借了 $ys-x$ 款项. 那么对于初始投资 x，在时刻 1 的收益为

113

$$\text{时刻 1 的收益} = \begin{cases} yus + (x - ys)(1 + r) & \text{若 } S(1) = us, \\ yds + (x - ys)(1 + r) & \text{若 } S(1) = ds, \end{cases}$$

其中 $S(1)$是时刻 1 时该证券的价格，r 是每个时间段内的利率. 因此，如果选择 x 和 y 使得

$$yus + (x - ys)(1 + r) = a,$$

$$yds + (x - ys)(1 + r) = b,$$

那么当从银行取出钱后(或者是偿还贷款后)我们就有足够的钱用于支付了. 用上面的第一个等式减去第二个等式，有

$$y = \frac{a - b}{s(u - d)}.$$

把 y 的表达式代入到第一个等式中我们得到

$$\frac{a - b}{u - d}[u - (1 + r)] + x(1 + r) = a$$

或者

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1+r}\left(a\left[1 - \frac{u-(1+r)}{u-d}\right] + b\frac{u-1-r}{u-d}\right) \\ &= \frac{1}{1+r}\left(a\frac{1+r-d}{u-d} + b\frac{u-1-r}{u-d}\right) \\ &= p\frac{a}{1+r} + (1-p)\frac{b}{1+r}, \end{aligned}$$

其中

$$p = \frac{1 + r - d}{u - d}.$$

也就是说，在 0 时刻需要的资金数量等于时刻 1 应支付的金额在风险中性概率下的期望现值. 此外此投资策略要求购买 $y = \frac{a-b}{s(u-d)}$ 股该证券并且把剩余的钱存入银行.

114

注 如果 $a>b$，即当在时刻 1 发生的支付是付给一个看涨期权持有者的情形，那么有 $y>0$，因此购买的证券数量为正的；如果 $a<b$，即当在时刻 1 的支付是付给一个看跌期权持有者情形，那么有 $y<0$，因此应该卖空 $-y$ 股该证券.

接下来要考虑的问题是，如何决定在 0 时刻需要的初始投资以满足在时刻 2 所发生的支付. 当证券在时刻 2 的价格是 $u^i d^{2-i} s(i=0, 1, 2)$ 时相应的支付记为 $x_{i,2}$. 为解决这个问题，首先需要考虑时刻 1 时该证券的各种可能价格，并在每一种可能价格下，确定该时刻所需投资金额以保证在时刻 2 有能力支付所发生的费用. 如果在时刻 1 证券价格是 us，那么时刻 2 当证券价格是 $u^2 s$ 时，需要支付的费用为 $x_{2,2}$；而若时刻 2 证券价格是 uds，需要支付的费用为 $x_{1,2}$. 因此，根据前面的分析可知，假如在时刻 1 的价格是 us，那么在时刻 1 所需要的支付数为

$$x_{1,1} = p\frac{x_{2,2}}{1+r} + (1-p)\frac{x_{1,2}}{1+r},$$

而投资策略为：购买

$$y_{1,1}=\frac{x_{2,2}-x_{1,2}}{us(u-d)}$$

股该证券并且把剩余的钱存入银行．类似地，如果时刻 1 的价格是 ds，那么为了能够在时刻 2 支付所发生的费用，在时刻 1 需要的支付数为

$$x_{0,1}=p\frac{x_{1,2}}{1+r}+(1-p)\frac{x_{0,2}}{1+r},$$

相应的投资策略为：购买

$$y_{0,1}=\frac{x_{1,2}-x_{0,2}}{ds(u-d)}$$

股该证券并且把剩余的钱存入银行．现在，在 0 时刻需要投资足够的钱以便在时刻 1 能够有 $x_{1,1}$ 或者 $x_{0,1}$ 资产，这由届时该证券的价格是 us 还是 ds 而定．因此，在 0 时刻需要

$$\begin{aligned}x_{0,0}&=p\frac{x_{1,1}}{1+r}+(1-p)\frac{x_{0,1}}{1+r}\\&=p^2\frac{x_{2,2}}{(1+r)^2}+2p(1-p)\frac{x_{1,2}}{(1+r)^2}+(1-p)^2\frac{x_{0,2}}{(1+r)^2}.\end{aligned}$$

115

这又一次表明当前所需钱的数量就是在风险中性测度下，最终所需支付的期望钱数的现值．投资策略为：购买

$$y_{0,0}=\frac{x_{1,1}-x_{0,1}}{s(u-d)}$$

股该证券并且把剩余的钱存入银行．

可以把上面的过程归纳为一般的 n 期的问题，若 n 个时间段结束时证券价格是 $u^i d^{n-i}s$，此时应支付的费用为 $x_{i,n}$．在时刻 j，假如已知此时证券价格是 $u^i d^{j-i}s$，那么在该时刻所需投入的钱数 $x_{i,j}$ 就等于最终的支付在时刻 j 的条件期望值．假设是在风险中性概率下考虑价格的变化过程，期望值就是在这个概率下计算的．（换句话说，价格的前后变化是独立的，每一个新的价格都等于上一个时间段的价格以概率 p 乘上因子 u，或者以概率 $1-p$ 乘上因子 d.）

如果最终是支付给一个看涨期权的持有者，假设该期权的到期日是 n，执行价是 K，那么在时刻 n 的支付金额就是

$$x_{i,n}=(u^i d^{n-i}s-K)^+,\quad i=0,\cdots,n,$$

只要此时证券的价格是 $u^i d^{n-i}s$．由于使用的策略复制了期权产生的收益，根据一价律（和套利定理），便得到初始需要的钱数 $x_{0,0}$，它也等于该期权唯一的无套利价格．而且，当时刻 j 证券价格为 $u^i d^{n-i}s$ 时，所需要的钱数 $x_{i,j}$ 就是该时刻同种标的证券期权的无套利价格．当在 0 时刻期权的价格 C 比 $x_{0,0}$ 高时，为了获取套利机会，可以卖出期权，然后用卖出期权所得收入 $x_{0,0}$ 来支付在时刻 n 应付的支

出，由此获取正的收益 $C-x_{0,0}$. 而如果假设 $C<x_{0,0}$，那么当该证券在时刻 n 的价格是 $u^i d^{n-i} s(i=0, \cdots, n)$ 时，与前面讲的把初始财富 $x_{0,0}$ 转化为时刻 n 的财富 $x_{i,n}$ 的投资过程相反(即把买变成卖，把卖变成买)，就能把初始的债务 $x_{0,0}$ 转化为在时刻 n 的债务 $x_{i,n}$. 因此，当 $C<x_{0,0}$ 时，可以贷款 $x_{0,0}$，然后用其中的 C 来购买期权，就可以实现把初始的债务转化成在 n 时刻的债务. 但在 n 时刻从期权所得的收益恰恰就是当时所欠的债务. 这样就构造了一个套利机会. 因此，无论出现上面哪一种情形，在 0 时刻都会有收益 $|C-x_{0,0}|$，而相应的投资策略又保证此后不会有额外的损失或者收益. 也就是说，在扣除收益之后，这样的投资策略对冲了所有的未来风险. [116]

现在要决定的是，当证券的价格服从波动率为 σ 的几何布朗运动时，一个执行价为 K 的看涨期权的对冲策略. 首先考虑有限期近似，此时每经过 h 个单位的时间，证券的价格要么上涨为原来的 $e^{\sigma\sqrt{h}}$ 倍，要么下跌为原来的 $e^{-\sigma\sqrt{h}}$ 倍. 假设股票现在的价格是 s，并且经过时间 t 后看涨期权到期. 由于 h 个单位时间以后，股票的价格为 $se^{\sigma\sqrt{h}}$ 或者 $se^{-\sigma\sqrt{h}}$，因此在下一个时间段，为了能够使用对冲策略，当证券价格是 $se^{\sigma\sqrt{h}}$ 时，所需要投资的钱数为 $C(se^{\sigma\sqrt{h}}, t-h)$；而如果价格是 $se^{-\sigma\sqrt{h}}$，所需的钱数则是 $C(se^{-\sigma\sqrt{h}}, t-h)$. 这里 $C(s, t)$ 表示在证券的当前价格是 s 时，一个执行价为 K 且经过时间 t 后到期的看涨期权的无套利价格(这个记号没有显示 C 对 K，r 和 σ 的依赖性). 因此，当证券的价格是 s 并且距离到期日还有时间 t 时，对冲策略要求持有

$$\frac{C(se^{\sigma\sqrt{h}}, t-h)-C(se^{-\sigma\sqrt{h}}, t-h)}{se^{\sigma\sqrt{h}}-se^{-\sigma\sqrt{h}}}$$

股该证券.

在几何布朗运动情形下，当证券的价格是 s 并且看涨期权经过时间 t 到期时，为了决定应该持有的股票数量，在上面表达式中令 h 趋向于 0. 此时所需要确定的是

$$\lim_{h\to 0}\frac{C(se^{\sigma\sqrt{h}}, t-h)-C(se^{-\sigma\sqrt{h}}, t-h)}{se^{\sigma\sqrt{h}}-se^{-\sigma\sqrt{h}}}$$
$$=\lim_{a\to 0}\frac{C(se^{\sigma a}, t-a^2)-C(se^{-\sigma a}, t-a^2)}{se^{\sigma a}-se^{-\sigma a}}.$$

[117]

然而，由微积分法则(洛必达法则和二元变量函数微分的链式法则)有

$$\lim_{a\to 0}\frac{C(se^{\sigma a}, t-a^2)-C(se^{-\sigma a}, t-a^2)}{se^{\sigma a}-se^{-\sigma a}}$$
$$=\lim_{a\to 0}\frac{s\sigma e^{\sigma a}\dfrac{\partial}{\partial y}C(y,t)\Big|_{y=se^{\sigma a}}+s\sigma e^{-\sigma a}\dfrac{\partial}{\partial y}C(y,t)\Big|_{y=se^{-\sigma a}}}{s\sigma e^{\sigma a}+s\sigma e^{-\sigma a}}$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}C(y,t)\Big|_{y=s}$$

$$= \frac{\partial}{\partial s} C(s,t).$$

因而，一个执行价是 K，到期日是 T 的看涨期权的收益可以由下面的投资策略复制. 这个投资策略需要投入资金 $C(S(0), T, K)$，并且在距离到期日还有时间 t 时，如果当时的证券价格是 s 就持有 $\frac{\partial}{\partial s}C(s, t, K)$ 股该证券，然后把此时的剩余资金存入银行（如果剩余资金是正的）或者从银行贷款（如果剩余资金是负的）.

如果 (K, T) 看涨期权的市场价格比 $C(S(0), T, K)$ 高，就可以卖出一个期权，然后用所得的 $C(S(0), T, K)$ 按照上面的策略来复制期权的支付，这样就能获得一个套利机会. 当市场价格比 $C(S(0), T, K)$ 低时，也可以通过反向操作来获得套利机会. 即贷款 $C(S(0), T, K)$，然后用其中的 C 购买一个 (K, T) 看涨期权（剩余的钱属于你自己）. 于是当证券的价格是 s 并且距离到期日还有时间 t 时保持 $\frac{\partial}{\partial s}C(s, t, K)$ 股该证券的空头头寸. 将来自这些空头头寸的资金投资后，连同看涨期权一起就可以用于偿还贷款和弥补最终的空头头寸了.

7.5 一些推导过程

在 7.5.1 节，将给出等式(7-2)，即 Black-Scholes 公式计算形式的推导过程. 118 在 7.5.2 节，将导出 $C(s, t, K, \sigma, r)$ 关于它的变量 s, t, K, σ, r 的偏导数.

7.5.1 Black-Scholes 公式

以

$$C(s,t,K,\sigma,r) = E[e^{-rt}(S(t)-K)^+]$$

表示利率为 r，标的证券的初始价格是 s 时，一个执行价是 K，到期日是 t 的看涨期权的风险中性价格. 这里我们假定标的证券价格服从波动率为 σ 的几何布朗运动. 为了推导 Black-Scholes 期权定价公式及 C 的偏导数，需要用到下面的事实：在风险中性概率下，$S(t)$ 可以表示为

$$S(t) = s\exp\{(r-\sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}Z\}, \tag{7-3}$$

其中 Z 是标准正态随机变量.

令 I 为期权到期时以实值结束这一事件的示性随机变量，即

$$I = \begin{cases} 1 & 若\ S(t) > K, \\ 0 & 若\ S(t) \leqslant K. \end{cases} \tag{7-4}$$

引理 7.5.1 利用表达式(7-3)和(7-4)，有

$$I=\begin{cases}1 & 若\ Z>\sigma\sqrt{t}-\omega,\\ 0 & 其他,\end{cases}$$

其中

$$\omega=\frac{rt+\sigma^2t/2-\log(K/s)}{\sigma\sqrt{t}}.$$

证明：

$$\begin{aligned}S(t)>K&\Leftrightarrow\exp\{(r-\sigma^2/2)t+\sigma\sqrt{t}Z\}>K/s\\ &\Leftrightarrow Z>\frac{\log(K/s)-(r-\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}\\ &\Leftrightarrow Z>\sigma\sqrt{t}-\omega.\end{aligned}$$

□　119

引理 7.5.2

$$E[I]=P\{S(t)>K\}=\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t}),$$

其中 Φ 是标准正态分布函数.

证明： 由定义可得

$$\begin{aligned}E[I]&=P\{S(t)>K\}\\ &=P\{Z>\sigma\sqrt{t}-\omega\}\quad(由引理\ 7.5.1)\\ &=P\{Z<\omega-\sigma\sqrt{t}\}\\ &=\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t}).\end{aligned}$$

□

引理 7.5.3

$$e^{-rt}E[IS(t)]=s\Phi(\omega).$$

证明： 取 $c=\sigma\sqrt{t}-\omega$，由表达式(7-3)和引理 7.5.1 得到

$$\begin{aligned}E[IS(t)]&=\int_c^{\infty}s\ \exp\{(r-\sigma^2/2)t+\sigma\sqrt{t}x\}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}s\ \exp\{(r-\sigma^2/2)t\}\int_c^{\infty}\exp\{-(x^2-2\sigma\sqrt{t}x)/2\}dx\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}se^{rt}\int_c^{\infty}\exp\{-(x-\sigma\sqrt{t})^2/2\}dx\\ &=se^{rt}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\omega}^{\infty}e^{-y^2/2}dy\quad(令\ y=x-\sigma\sqrt{t})\\ &=se^{rt}P\{Z>-\omega\}\\ &=se^{rt}\Phi(\omega).\end{aligned}$$

□

定理 7.5.1(Black-Scholes 定价公式)

$$C(s,t,K,\sigma,r)=s\Phi(\omega)-Ke^{-rt}\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t}).$$

120

证明：

$$\begin{aligned}C(s,t,K,\sigma,r) &= \mathrm{e}^{-rt}E[(S(t)-K)^+]\\ &= \mathrm{e}^{-rt}E[I(S(t)-K)]\\ &= \mathrm{e}^{-rt}E[I(S(t)]-K\mathrm{e}^{-rt}E[I],\end{aligned}$$

由引理 7.5.2 和引理 7.5.3 得到所需的结论. □

7.5.2 偏导数

设 Z 是均值为 0，方差为 1 的正态随机变量，$W=(r-\sigma^2/2)t+\sigma\sqrt{t}Z$. 于是 W 是均值为$(r-\sigma^2/2)t$，方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量.

Black-Scholes 看涨期权公式可以写与

$$C=C(s,t,K,\sigma,r)=E[\mathrm{e}^{-rt}I(s\mathrm{e}^W-K)],$$

其中

$$I=\begin{cases}1 & \text{如果 } s\mathrm{e}^W>K\\ 0 & \text{如果 } s\mathrm{e}^W\leqslant K\end{cases}$$

是事件 $s\mathrm{e}^W>K$ 的示性函数. 现在

$$\mathrm{e}^{-rt}=I(s\mathrm{e}^W-K)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-rt}(s\mathrm{e}^W-K) & \text{如果 } s\mathrm{e}^W>K,\\ 0 & \text{如果 } s\mathrm{e}^W\leqslant K.\end{cases}$$

对给定 Z，因为上述公式是关于参数 s，t，K，σ，r 的可微函数，所以关于 x 求导相当于关于任意变量求导，

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{-rt}I(s\mathrm{e}^W-K)=\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{-rt}(s\mathrm{e}^W-K) & \text{如果 } s\mathrm{e}^W>K,\\ 0 & \text{如果 } s\mathrm{e}^W\leqslant K,\end{cases}$$

即

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{-rt}I(s\mathrm{e}^W-K)=I\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{-rt}(s\mathrm{e}^W-K).$$

利用偏导数和期望运算可以相互转换规则，上式给出

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}E[\mathrm{e}^{-rt}(s\mathrm{e}^W-K)]\\ &= E[\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{-rt}I(s\mathrm{e}^W-K)]\\ &= E[I\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{-rt}(s\mathrm{e}^W-K)].\end{aligned} \tag{7-5}$$

121

下面推导 C 关于 K，s，r 的偏导数.

命题 7.5.1

$$\frac{\partial C}{\partial K}=-\mathrm{e}^{-rt}\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t}).$$

证明：由于 $S(t)$不依赖于 K，

$$\frac{\partial}{\partial K}\mathrm{e}^{-rt}(S(t)-K)=-\mathrm{e}^{-rt}.$$

由等式(7-5)得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial K}&=E[-I\mathrm{e}^{-rt}]\\&=-\mathrm{e}^{-rt}E[I]\\&=-\mathrm{e}^{-rt}\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t}),\end{aligned}$$

其中最后的等号用到引理 7.5.2. □

如前面所述，将$\frac{\partial C}{\partial s}$称为 delta.

命题 7.5.2

$$\frac{\partial C}{\partial s}=\Phi(\omega).$$

证明：由等式(7-3)得到

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{e}^{-rt}(S(t)-K)=\mathrm{e}^{-rt}\frac{\partial S(t)}{\partial s}=\frac{S(t)}{s}\mathrm{e}^{-rt}.$$

因此，由等式(7-5)有

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial s}&=\frac{\mathrm{e}^{-rt}}{s}E[IS(t)]\\&=\Phi(\omega),\end{aligned}$$

其中最后一个等号用到引理 7.5.3. □

C 关于 r 的偏导数称为 rho. [122]

命题 7.5.3

$$\frac{\partial C}{\partial r}=Kt\mathrm{e}^{-rt}\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t}).$$

证明：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}[\mathrm{e}^{-rt}(S(t)-K)]&=-t\mathrm{e}^{-rt}(S(t)-K)+\mathrm{e}^{-rt}\frac{\partial S(t)}{\partial r}\\&=-t\mathrm{e}^{-rt}(S(t)-K)+\mathrm{e}^{-rt}tS(t)\quad(\text{由式}(7\text{-}3))\\&=Kt\mathrm{e}^{-rt}.\end{aligned}$$

因此，由等式(7-5)和引理 7.5.2，有

$$\frac{\partial C}{\partial r} = Kt\mathrm{e}^{-rt}E[I] = Kt\mathrm{e}^{-rt}\Phi(\omega - \sigma\sqrt{t}).$$ □

为求其他偏导数，还需要另外一个引理，其证明与引理 7.5.3 的证明类似.

引理 7.5.4 设 $S(t)$ 由等式(7-3)给出，则

$$\mathrm{e}^{-rt}E[IS(t)Z] = s(\Phi'(\omega) + \sigma\sqrt{t}\Phi(\omega)).$$

证明：取 $c=\sigma\sqrt{t}-\omega$，由引理 7.5.1 有

$$\begin{aligned}
&E[IZS(t)]\\
&= \int_c^{\infty} xs\ \exp\{(r-\sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}x\}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}s\ \exp\{(r-\sigma^2/2)t\}\int_c^{\infty} x\exp\{-(x^2 - 2\sigma\sqrt{t}x)/2\}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}s\mathrm{e}^{rt}\int_c^{\infty} x\exp\{-(x-\sigma\sqrt{t})^2/2\}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}s\mathrm{e}^{rt}\int_{-\omega}^{\infty}(y+\sigma\sqrt{t})\mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y \quad (\text{令 } y = x-\sigma\sqrt{t})\\
&= s\mathrm{e}^{rt}\left[\int_{-\omega}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y\mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y + \sigma\sqrt{t}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\omega}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y\right]\\
&= s\mathrm{e}^{rt}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\omega^2/2} + \sigma\sqrt{t}\Phi(\omega)\right].
\end{aligned}$$ □

123

C 关于 σ 的偏导数称为 vega.

命题 7.5.4

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = s\sqrt{t}\Phi'(\omega).$$

证明：

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}[\mathrm{e}^{-rt}(S(t)-K)] = \mathrm{e}^{-rt}S(t)(-t\sigma + \sqrt{t}Z).$$

因此，由等式(7-5)，有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial \sigma} &= E[\mathrm{e}^{-rt}IS(t)(-t\sigma+\sqrt{t}Z)]\\
&= -t\sigma\mathrm{e}^{-rt}E[IS(t)] + \sqrt{t}\mathrm{e}^{-rt}E[IS(t)Z]\\
&= -t\sigma s\Phi(\omega) + s\sqrt{t}(\Phi'(\omega) + \sigma\sqrt{t}\Phi(\omega))\\
&= s\sqrt{t}\Phi'(\omega),
\end{aligned}$$

其中倒数第二个等号用到了引理 7.5.3 和引理 7.5.4. □

C 关于 t 的偏导数的负数称为 theta.

命题 7.5.5

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}s\Phi'(\omega)+Kre^{-rt}\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t}).$$

证明：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}[e^{-rt}(S(t)-K)]&=e^{-rt}\frac{\partial S(t)}{\partial t}-re^{-rt}S(t)+Kre^{-rt}\\&=e^{-rt}S(t)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}Z\right)-re^{-rt}S(t)+Kre^{-rt}\\&=e^{-rt}S(t)\left(\frac{-\sigma^2}{2}+\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}Z\right)+Kre^{-rt}.\end{aligned}$$

124

因而根据等式(7-5)有

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t}&=-e^{-rt}E[IS(t)]\frac{\sigma^2}{2}+e^{-rt}E[IZS(t)]\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}+Kre^{-rt}E[I]\\&=-s\Phi(\omega)\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}s(\Phi'(\omega)+\sigma\sqrt{t}\Phi(\omega))+Kre^{-rt}\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t})\\&=\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}s\Phi'(\omega)+Kre^{-rt}\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t}).\end{aligned}$$

□

注 为了计算 vega 和 theta，需要用到 $\Phi'(x)$是标准正态分布密度函数，它由下式给出：

$$\Phi'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

下面的推论使用上述偏导数来对 7.2 节中的结果给出一个解析证明.

推论 7.5.1 $C(s, t, K, \sigma, r)$

a)关于 K 单调递减并且是凸的.

b)关于 s 单调递增并且是凸的.

c)关于 r，σ，t 单调递增，但关于它们既不是凸的也不是凹的.

证明： a)由命题 7.5.1 知$\frac{\partial C}{\partial K}<0$，并且有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}&=-e^{-rt}\Phi'(\omega-\sigma\sqrt{t})\frac{\partial\omega}{\partial K}\\&=e^{-rt}\Phi'(\omega-\sigma\sqrt{t})\frac{1}{K\sigma\sqrt{t}}\\&>0.\end{aligned}$$

b)由命题 7.5.2 有$\frac{\partial C}{\partial s}>0$，而且

$$\frac{\partial^2 C}{\partial s^2} = \Phi'(\omega)\frac{\partial \omega}{\partial s}$$
$$= \Phi'(\omega)\frac{1}{s\sigma\sqrt{t}}$$
$$> 0. \tag{7-6}$$

125

c)由命题 7.5.3、7.5.4 和 7.5.5，对于 $x=r$，σ，t 有

$$\frac{\partial C}{\partial x} > 0,$$

这就证明了单调性. 由于 C 对 r，σ，t 的二阶导数都有可能是正或负的，所以 C 关于它们中任何一个变量既不是凸的也不是凹的. □

注 无论假设证券的价格服从什么样的模型，$C(s, t, K, \sigma, r)$ 关于 K 单调递减并且是凸的、关于 t 单调递增的结论永远是正确的. $C(s, t, K, \sigma, r)$ 关于 s 单调递增并且是凸的、关于 r、σ 单调递增的结论则要依赖于价格服从波动参数是 σ 的几何布朗运动的假设. C 关于 s 的二阶导数称为 gamma，它的值由等式(7-6)给出.

7.6 欧式看跌期权

由看跌–看涨期权平价公式及 Black-Scholes 公式知：一个欧式(K, t)看跌期权有唯一的无套利成本

$$P(s,t,K,r,\sigma) = C(s,t,K,r,\sigma) + Ke^{-rt} - s \tag{7-7}$$

为了判断 $P=P(s, t, K, r, \sigma)$的单调性及凸性，需要用到 $P(s, t, K, r, \sigma)$ 必须与风险中性几何布朗运动下看跌期权的期望回报相等. 对标准正态随机变量 Z 有

$$P(s,t,K,r,\sigma) = e^{-rt}E[(K - se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma\sqrt{t}Z})^+]$$
$$= E[(Ke^{-rt} - se^{-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma\sqrt{t}Z})^+]$$

当 Z 取一个固定值时，函数$(Ke^{-rt} - se^{-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma\sqrt{t}Z})^+$满足：

1)关于 s 是单调减小与凸的(因为$(a-bs)^+$，当 $b>0$ 时，关于 s 是单调减小与凸的).

126

2)关于 r 是单调减小与凸的(因为$(ae^{-rt}-b)^+$，当 $a>0$ 时，关于 r 是单调减小与凸的).

3)关于 K 是单调增加与凸的(因为$(aK-b)^+$，当 $a>0$ 时，关于 K 是单调增加与凸的).

因为上述性质对取数学期望后仍成立，所以，

- $P(s, t, K, r, \sigma)$关于 s 是单调减小与凸的.

- $P(s, t, K, r, \sigma)$关于 r 是单调减小与凸的.
- $P(s, t, K, r, \sigma)$关于 K 是单调增加与凸的.

又因为 $C(s, t, K, r, \sigma)$关于 σ 是单调增加的，由式(7-7)知

- $P(s, t, K, r, \sigma)$关于 σ 是单调增加的.

最后

- $P(s, t, K, r, \sigma)$关于 t 没有单调性.

$P(s, t, K, r, \sigma)$的偏导数可由 $C(s, t, K, r, \sigma)$的相应偏导数及关系式(7-6)求得.

7.7 习题

除非特别说明，否则下面提到的单位时间都是一年.

练习 7.1 如果股票的波动率是 0.33，求下面两个变量的标准差.

a) $\log\left(\frac{S_d(n)}{S_d(n-1)}\right)$,

b) $\log\left(\frac{S_m(n)}{S_m(n-1)}\right)$,

其中 $S_d(n)$和 $S_m(n)$分别表示证券在第 n 天和第 n 个月结束时的价格.

练习 7.2 某种证券的价格服从参数 $\mu=0.12$ 和 $\sigma=0.24$ 的几何布朗运动. 如果该证券的当前价格是 40，那么对于一个还有四个月才到期、执行价是 $K=42$ 的看涨期权，它会被执行的概率有多大？(如果标的证券的价格在看涨期权到期日高于期权的执行价，那么就称该证券以实值结束.) 127

练习 7.3 如果利率是 8%，那么练习 7.2 中的看涨期权的风险中性价值是多少？

练习 7.4 证券的当前价格是105，那么一个执行价是 100、六个月到期的欧式看跌期权的风险中性价值是多少？已知利率是 10%，证券的波动率是 0.30.

练习 7.5 一个证券的价格服从漂移参数是0.06，波动参数是 0.3 的几何布朗运动.

a)六个月内证券的价格比它现在的价格低 90%的概率有多大？

b)考虑一种新型的投资：初始成本为 A，六个月后如果届时的价格低于初始价格 90%就给你 100，否则就给你 0. 要使得这种投资不允许套利存在，A 的值应该是多少？

练习 7.6 某种证券的价格服从漂移参数 $\mu=0.05$，波动参数 $\sigma=0.3$ 的几何布朗运动. 证券的当前价格是 95.

a)如果利率是4%，求一个三个月到期、执行价是100的看涨期权的无套利价格.

b)a)中的看涨期权到期日价值为 0 的概率是多少？

c)假设关于这种证券的一种新型投资正在交易. 如果购买这种投资后的六个月内证券的价格至少为105，并且购买一年后的价格至少和六个月时的价格一样多，那么这种投资在一年后的收益为50. 求这种投资的无套利价格.

练习 7.7 一个欧式的资产或无价值(asset-or-nothing)看涨期权约定：如果在期权到期时证券的价格高于 K，就在到期日支付给它的持有者固定的数量 F，否则支付 0. 如果该证券的当前价格是 38，它的波动率是 0.32，利率是 6%，求这样一个看涨期权的风险中性价值. 假设它在六个月后到期，并且 $F=100$，$K=40$.

练习 7.8 如果几何布朗运动的漂移参数是 0，求练习 7.7 中资产或无价值(asset-or-nothing)看涨期权支付的期望值.

128

练习 7.9 为了决定一个欧式看涨期权以实值结束的概率(见练习 7.2)，知道 K，$S(0)$，r，t，σ 这五个参数就足够了吗？请对你的答案加以说明. 如果答案是"否"，那么还需要知道其他什么条件呢？

练习 7.10 设证券价格服从漂移参数为 0.05，波动参数为 0.4 的几何布朗运动，且当前价格为 100. 现有一基于该证券的合约：成本价为 10，一年后如 $S(1)<95$ 收益为 5，如 $S(1)>110$ 收益为 x，其他情况收益为 0，连续复利名义利率为 6%.

a)证券价格可能取任何值，要使该合约无套利，x 应取何值？

b)$S(1)<95$ 的概率是多少？

练习 7.11 某交易证券的价格服从漂移参数为 0.06，波动参数为 0.4 的几何布朗运动，且当前价格为 40. 经纪公司出售基于该证券的合约：成本价为 C，如果在 6 个月时证券价格不低于 42 或一年后证券价格大于 6 个月时价格的 5%，则收益为 100. 即仅当 $S(0.5)\geqslant 42$ 或 $S(1)>1.05S(0.5)$ 时才会有收益. 连续复利名义利率为 0.06.

a)要使该合约无套利，C 应取何值？

b)购买该合约赢利的概率是多少？

练习 7.12 某交易证券的价格服从漂移参数为 0.04，波动参数为 0.2 的几何布朗运动，且当前价格为 40. 经纪公司出售基于该证券的合约：成本价为 10，一年末如果 $S(1)>(1+x)40$，即价格增长超过 $100x\%$，才有收益 100. 假定连续复利利率为 0.02，合约可以买卖.

a)要使该合约无套利，x 应取何值？

b)购买该合约赢利的概率是多少？

练习 7.13 欧式资产或无价值期权为：如果在到期日 t 满足 $S(t)>K$，则支付给合约持有人资产值 $S(t)$，否则支付给合约持有人 0. 求该期权的含参数 s，t，K，r，σ 的无套利成本公式.

129

练习 7.14 如果一个看涨期权的执行价是 0，那么这个看涨期权的价格应该是多少?

练习 7.15 当一个看涨期权的到期日越来越长时，它的价格会如何变化?解释你的理由(或者用数学证明).

练习 7.16 当波动率越来越小时，一个(K, t)看涨期权的价格应该怎样变化?

练习 7.17 通过绘制函数 $f(r)=(ae^{-rt}-b)^{+}$ 的图形，说明当 $a>0$ 时函数关于 r 是单调减小与凸的.

练习 7.18 对于函数 $g(r)=(a-be^{-rt})^{+}$，当 $b>0$ 时，关于 r 有凹凸性吗?

参考文献

在[1]中，Black-Scholes 公式是通过解随机微分方程的方法推导出来的. 通过多期二叉树模型来近似几何布朗运动，从而获得该公式的思想出自于[2]. 文献[3]、[4]、[5]都是关于期权问题比较流行的教材，但阅读它们需要比阅读本教材具备更高深的数学知识.

[1] Black, F., and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." *Journal of Political Economy* 81: 637-59.

[2] Cox, J., S. A. Ross, and M. Rubinstein (1979). "Option Pricing: A Simplified Approach." *Journal of Financial Economics* 7: 229-64.

[3] Cox, J., and M. Rubinstein (1985). *Options Markets*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[4] Hull, J. (1997). *Options, Futures, and Other Derivatives*, 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[5] Luenberger, D. (1998). *Investment Science*. Oxford: Oxford University Press.

130

第 8 章　关于期权的其他结果

8.1　引言

本章讨论基本看涨期权模型的一些推广. 在 8.2 节中考虑分红证券的欧式看涨期权，我们将对三种不同的分红情形进行讨论. 8.2.1 节假设证券的红利是连续支付的，其支付率等于标的证券价格的某个固定比率. 8.2.2 节和 8.2.3 节假设只在特定的时间分红，支付的数量等于证券价格的固定比率(8.2.2 节)或者是一个固定的数量(8.2.3 节). 8.3 节说明如何确定一个美式看跌期权的无套利价格. 在 8.4 节中我们将介绍一种允许证券的价格有跳跃的模型. 此模型假定证券价格除了在一个随机时间会变化为原来价格的一个随机倍数外，其他时间的价格变化都符合几何布朗运动. 8.4.1 节推导出当跳跃倍数服从对数正态概率分布时看涨期权无套利价格的具体公式. 8.4.2 节中假设跳跃倍数的概率分布是任意的，然后证明它的无套利价格至少和没有跳跃时 Black-Scholes 公式所确定的价格一样，并给出了该无套利价格的近似值. 8.5 节描述了估计波动参数的几种不同方法. 8.6 节是关于本章和前面章节中一些结果的评论.

8.2　分红证券的看涨期权

本节讨论标的证券有分红时，如何确定它的欧式看涨期权的无套利价格. 下面考虑三种不同的红利支付方式.

8.2.1　证券每股红利以证券价格的固定比率 f 连续支付

先看一个例子，假如股票当前价格是 S，那么当 dt 很小时，在其后 dt 个时间单位内每一股股票应得的红利近似为 $fSdt$.

首先，需要构建证券的价格模型. 为了得到一个可行的模型，一种方法就是假设所有的红利都被再投资于购买标的股票. 这样，股票数量将以连续复合比率 f 增长. 因此，如果在 0 时刻购买了一股股票，那么在时刻 t 就会有 e^{ft} 股该股票，它的总市场价值为

$$M(t) = e^{ft}S(t).$$

假设 $M(t)$ 服从某个波动率为 σ 的几何布朗运动是合理的. 因此关于 $M(t)$ 的风险中性概率就是波动参数为 σ，漂移参数是 $r-\sigma^2/2$ 的几何布朗运动的风险中性概率. 此时为了不存在套利，所有的期权都应该按照下述假设定价以使关于它们的买卖成为公平赌博：$e^{fy}S(y)(y\geqslant 0)$ 是这样的一个风险中性几何布朗运动.

考虑一个欧式看涨期权：它允许持有者在时刻 t 以价格 K 买入上述证券. 在关于 $M(t)$ 的风险中性概率下，有

$$\frac{S(t)}{S(0)}=\frac{e^{-ft}M(t)}{M(0)}=e^{-ft}e^{W},$$

其中 W 是一个期望为 $(r-\sigma^2/2)t$、方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量．因此，还有

$$S(t)=S(0)e^{-ft}e^{W}.$$

由套利定理知，如果 $S(0)=s$，那么

132

$$\begin{aligned}(K,t)\text{ 期权的无套利价格} &= e^{-rt}E[(S(t)-K)^+] \\ &= e^{-rt}E[(se^{-ft}e^{W}-K)^+] \\ &= C(se^{-ft},t,K,\sigma,r),\end{aligned}$$

其中 $C(s,\ t,\ K,\ \sigma,\ r)$ 是 Black-Scholes 公式所给的价格．这就是说，当初始价格是 s 时，欧式 $(K,\ t)$ 看涨期权的无套利价格恰恰就是没有分红时初始价格为 se^{-ft} 的标的证券的期权价格．

8.2.2 每股证券在时刻 t_d 单次分红 $fS(t_d)$

通常的红利支付，股票价格瞬间下跌的数量等于所付红利．(假如股票价格下跌量比支付的红利少，那么在分红前一瞬间买入该股票并在红利支付后立刻将其卖出就可以获得套利机会；所以，股票价格下跌的数量至少要和分的红利一样多；通常和实际数据相一致的假设是，价格下跌的幅度刚好等于所支付的红利．)由于支付红利时股票价格会向下跳跃，所以不能用几何布朗运动来模拟证券的价格变化(几何布朗运动没有不连续点)．但是，如果假设在时刻 t_d 分红所得的钱都被用来购买更多的股份，那么仍可以用几何布朗运动来模拟股票的市场价值．由于红利支付后短期内每股股票的价格是 $S(t_d)-fS(t_d)=(1-f)S(t_d)$，每股所得的红利 $fS(t_d)$ 可以购买额外的 $f/(1-f)$ 股该证券．因此，若初始时刻 0 有一股股票，那么投资组合在时刻 y 的市场价值(记为 $M(y)$)是

$$M(y)=\begin{cases}S(y) & \text{若 } y<t_d, \\ \dfrac{1}{1-f}S(y) & \text{若 } y\geqslant t_d.\end{cases}$$

假设 $M(y)(y\geqslant 0)$ 是一个波动参数为 σ 的几何布朗运动．这个过程的风险中性概率就是波动参数为 σ、漂移参数是 $r-\sigma^2/2$ 的几何布朗运动的概率．对于 $y<t_d$，有 $M(y)=S(y)$；所以，当 $t<t_d$ 时，关于该证券的一个 $(K,\ t)$ 期权的唯一无套利价格就是通常 Black-Scholes 公式所给的价格．对于 $t>t_d$，注意到

133

$$\frac{S(t)}{S(0)}=(1-f)\frac{M(t)}{M(0)},\quad t>t_d.$$

因此在风险中性概率下有

$$\frac{1}{1-f}\frac{S(t)}{S(0)}=\frac{M(t)}{M(0)}=e^{W},\quad t>t_d,$$

其中 W 是期望为$(r-\sigma^2/2)t$、方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量. 同样还有

$$S(t)=(1-f)S(0)e^W, \quad t>t_d.$$

当 $t>t_d$ 时，如果证券的初始价格是 s，根据套利定理可知，一个(K, t)欧式看涨期权唯一的无套利价格，恰恰就是初始价格为 $s(1-f)$的没有分红时证券的期权价格. 也就是说，对于 $t>t_d$，

$$\begin{aligned}(K,t)\text{ 期权的无套利价格} &= e^{-rt}E[(S(t)-K)^+] \\ &= e^{-rt}E[(s(1-f)e^W-K)^+] \\ &= C(s(1-f),t,K,\sigma,r),\end{aligned}$$

其中 $C(s, t, K, \sigma, r)$是 Black-Scholes 公式所给价格.

8.2.3 每股证券在时刻 t_d 以固定数量 D 分红

与前面一样，我们要先确定证券价格过程 $S(y)(y\geqslant 0)$的合理模型. 首先，为确定在时刻 t_d 支付给股东固定数量 D 的红利，在时刻 $y<t_d$，证券的价格必须至少为 $De^{-r(t_d-y)}$. 这是因为，对于某些 $y<t_d$ 有 $S(y)<De^{-r(t_d-y)}$，如果在时刻 y 贷款 $S(y)$，并用这笔钱去购买该证券，而且一直持有这些证券直到时刻 t_d，那么收到红利后立刻就可以归还贷款，这样就出现了一个套利机会. 因此，不能用几何布朗运动来模拟 $S(y)(0\leqslant y\leqslant t_d)$.

为模拟时刻 t_d 之前的价格变化，把证券的价格拆成两个部分，其中一部分是无风险的，它是在时刻 t_d 所支付的固定红利. 即令

$$S^*(y)=S(y)-De^{-r(t_d-y)}, \quad y<t_d,$$

134

所以

$$S(y)=De^{-r(t_d-y)}+S^*(y), \quad y<t_d.$$

这样把 $S^*(y)$，$y<t_d$ 模拟为一个具有波动参数 σ 的几何布朗运动就是合理的. 由于证券价格的无风险部分是按比率 r 增加的，从直观上看，当 $S^*(y)$，$y<t_d$ 的漂移参数是 $r-\sigma^2/2$ 时，就得到了风险中性概率. 要验证关于漂移参数的这个假设能使所有的赌博都公平，只需要注意到在此假设下，在 0 时刻买入证券并在时刻 $t<t_d$ 将其卖出，如此所得的期望回报现值为

$$\begin{aligned}e^{-rt}E[S(t)] &= e^{-rt}De^{-r(t_d-t)}+e^{-rt}E[S^*(t)] \\ &= De^{-rt_d}+S^*(0) \\ &= S(0).\end{aligned}$$

现在要求证券初始价格是 s 时，一个执行价为 K，到期日为 $t<t_d$ 的欧式看涨期权的无套利价格. 如果 $K<De^{-r(t_d-t)}$，那么期权将肯定会被执行(因为 $S(t)\geqslant De^{-r(t_d-t)}$). 那么，此时购买期权就等价于购买证券. 根据一价律，期权的价值加上执行价的当前价值等于证券的价值. 也就是说，如果 $t<t_d$ 并且 $K<$

$De^{-r(t_d-t)}$，那么就有

$$\text{期权的无套利价格} = s - Ke^{-rt}.$$

如果假设期权在时间 $t<t_d$ 到期，并且它的执行价 K 满足 $K \geqslant De^{-r(t_d-t)}$. 由于 $S^*(y)$是几何布朗运动，可以使用风险中性表达式

$$S^*(t) = S^*(0)e^W = (s - De^{-rt_d})e^W,$$

其中 W 是一个均值为$(r-\sigma^2/2)t$、方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量. 由套利定理知

$$\begin{aligned}\text{期权无套利价格} &= e^{-rt}E[(S(t)-K)^+] \\ &= e^{-rt}E[(S^*(t)+De^{-r(t_d-t)}-K)^+] \\ &= e^{-rt}E[((s-De^{-rt_d})e^W-(K-De^{-r(t_d-t)}))^+] \\ &= C(s-De^{-rt_d},t,K-De^{-r(t_d-t)},\sigma,r).\end{aligned}$$

135

这就是说，如果分红在期权到期后进行，那么该期权的无套利价格就等于证券初始价格为 $s-De^{-rt_d}$ 时，根据 Black-Scholes 期权定价公式计算出的执行价为 $K-De^{-r(t_d-t)}$ 的看涨期权价格.

现在考虑一个欧式看涨期权，它的执行价是 K，到期日是 $t>t_d$. 同样假设证券的初始价格是 s. 由于在时刻 t_d 证券的价格会立刻下跌 D（分红数量），所以，

$$S(t) = S^*(t), \quad t \geqslant t_d.$$

因而，如果在时间 t_d 后几何布朗运动 $S^*(y)$的波动率保持不变，$1(K, t)$看涨期权的风险中性价格将是

$$\begin{aligned}e^{-rt}E[(S(t)-K)^+] &= e^{-rt}E[(S^*(t)-K)^+] \\ &= e^{-rt}E[(S^*(0)e^W-K)^+] \\ &= e^{-rt}E[((s-De^{-rt_d})e^W-K)^+].\end{aligned}$$

由于上面等式的右边等于证券初始价格为 $s-De^{-rt_d}$，执行价是 K，到期日是 t 的看涨期权的 Black-Scholes 价格，所以

$$\text{期权的风险中性价格} = C(s-De^{-rt_d},t,K,\sigma,r).$$

换句话说，如果标的证券在期权有效期内支付红利，那么这个期权的无套利价格就可以由 Black-Scholes 公式得到，不同之处是将证券的初始价格减去红利的现值.

8.3 美式看跌期权的定价

要确定欧式看跌期权的风险中性价格很容易. 根据看涨-看跌期权平价公式有

$$P(s,t,K,\sigma,r) = C(s,t,K,\sigma,r) + Ke^{-rt} - s,$$

其中 $P(s, t, K, \sigma, r)$是时刻 t 到期，执行价为 K 的欧式看跌期权的风险中性

价格，这里假定证券在 0 时刻的价格是 s，波动率是 σ，利率是 r，那么 $C(s, t, K, \sigma, r)$是相应的看涨期权的风险中性价格. 不过，由于有时可以从提前执行期权中获益，美式看跌期权的风险中性价格就不能这么直接得到. 下面使用一种比较有效的方法来估计该价格较精确的近似值. 136

一个美式看跌期权的风险中性价格等于在下面假设下的期权期望现值：期权的标的证券价格变化服从风险中性几何布朗运动，并且其持有者可使用最优策略来决定何时执行. 为近似该期权的价格，用下面多时期二叉树模型来近似风险中性几何布朗运动. 任选一个整数 n，设 t 为期权的到期日，令 $t_k = kt/n$ $(k=0, 1, \cdots, n)$. 假设：

1)期权只能在时刻 $t_k(k=0, 1, \cdots, n)$其中之一时进行交割；

2)如果 $S(t_k)$是时刻 t_k 的证券价格，那么

$$S(t_{k+1}) = \begin{cases} uS(t_k) & \text{以概率 } p, \\ dS(t_k) & \text{以概率 } 1-p, \end{cases}$$

其中

$$u = e^{\sigma\sqrt{t/n}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{t/n}},$$

$$p = \frac{1 + rt/n - d}{u - d}.$$

该过程最初两个可能的价格变化情况如图 8-1 所示.

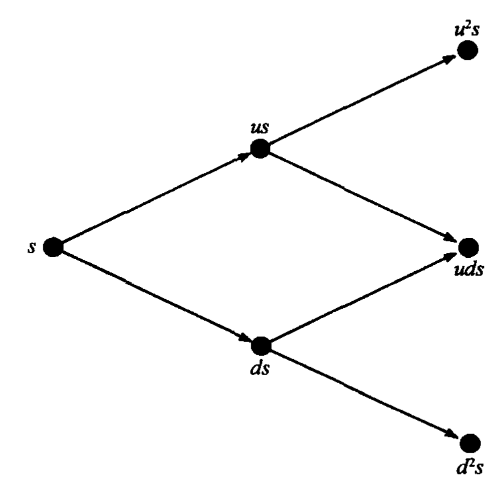


图 8-1 离散近似模型的可能价格

由 7.1 节知道，当 n 越来越大时，上面的离散价格过程近似一个风险中性几何布朗运动过程；此外，可以证明在几何布朗运动下价格曲线是连续的，所以直观上看(也可以严格证明)：当 n 越来越大时，因只允许期权在时刻 t_k 交割所产生的损失的期望值将会趋于 0. 所以，只要选择足够大的 n 值，在条件 1)、2)以及

使用最优策略来决定期权执行时间的假设下，一个美式期权的风险中性价格就可以用该期权的期望回报现值来近似. 下面讨论如何确定这个期望回报现值.

首先注意，如果在前 k 个价格变化中有 i 次上升及 k-i 次下降，那么在时刻 t_k 证券的价格是

$$S(t_k) = u^i d^{k-i} s.$$

由于 i 的值必须是 0，1，…，k 中的一个，则在时刻 t_k 证券的价格就有 $k+1$ 种可能性. 现在假设在时刻 t_k 证券的价格是 $S(t_k)=u^i d^{k-i} s$，并且在该时刻之后将有一最优策略，令 $V_k(i)$ 表示在时刻 t_k 此看跌期权的期望回报现值.

为决定此看跌期权产生的期望回报现值 $V_0(0)$，从后往前递推. 即先决定 i 有 $n+1$ 种可能值时，其相对应的 $V_n(i)$ 值；再决定 i 有 n 种可能值时，其相对应的 $V_{n-1}(i)$ 的值；然后是 i 有 $n-1$ 种可能值时，其相对应的 $V_{n-2}(i)$ 的值. 要完成这项工作，首先注意到，期权是在时刻 t_n 执行，所以有

$$V_n(i) = \max(K - u^i d^{n-i} s, 0), \tag{8-0}$$

137～138

这个等式决定了每一个 $V_n(i)$，$i=0$，…，n 的值. 令

$$\beta = e^{-rt/n};$$

假设现在处于时刻 t_k，期权还没被执行且股票的价格是 $u^i d^{k-i} s$. 如果此时执行期权，就可以得到 $K-u^i d^{k-i} s$. 反之，股票在时刻 t_{k+1} 的价格将会以概率 p 等于 $u^{i+1} d^{k-i} s$，或者以概率 $1-p$ 等于 $u^i d^{k-i+1} s$. 如果是 $u^{i+1} d^{k-i} s$ 并且从那时起使用一个最优策略，那么在时刻 t_k 这个看跌期权的期望收益是 $\beta V_{k+1}(i+1)$；类似地，如果价格下降，期望收益将会是 $\beta V_{k+1}(i)$. 由于证券的价格将会以概率 p 上升或者以概率 $1-p$ 下降，所以如果在时刻 t_k 不执行期权而是继续使用最优策略，则在时刻 t_k 的期望收益是

$$p\beta V_{k+1}(i+1) + (1-p)\beta V_{k+1}(i).$$

因为执行期权获得的收益是 $K-u^i d^{k-i} s$，而如果不执行，上面的结果就是最大的期望收益，所以可能获得的最大期望收益就是这两者之中较大的一个. 也就是说，对于 $k=0$，…，$n-1$，

$$V_k(i) = \max(K - u^i d^{k-i} s, \beta p V_{k+1}(i+1) + \beta(1-p) V_{k+1}(i)),$$
$$i = 0, \cdots, k. \tag{8-1}$$

为求近似值，首先利用公式(8-0)来决定 $V_n(i)$ 的值；再在公式(8-1)中取 $k=n-1$ 就得到 $V_{n-1}(i)$的值；然后在公式(8-1)中令 $k=n-2$ 得到 $V_{n-2}(i)$的值；如此下去直到得到想要的 $V_0(0)$值，它就是这个美式看跌期权风险中性价格的近似值. 尽管这个过程用手工计算很繁杂，但若编程计算却比较容易.

注 1)注意到 $ud=1$ 并利用下面可证明的结果，就可以简化上面的计算过程.

a)若在时刻 t_k 证券价格是 x 时看跌期权价值为零，那么当证券价格高于 x 时，时刻 t_k 的期权价值也为零．即

$$V_k(i) = 0 \Rightarrow V_k(j) = 0, \quad 若\ j > i.$$

139

b)若最优选择是在时刻 t_k 证券价格为 x 时执行该期权，那么在时刻 t_k，如果证券价格低于 x，执行该期权同样是最优的．亦即

$$V_k(i) = K - u^i d^{k-i} s \Rightarrow V_k(j) = K - u^j d^{k-j} s, \quad 若\ j < i.$$

2)虽然定义 β 为 $e^{-rt/n}$，实际上也可将它定义为 $\dfrac{1}{1+rt/n}$.

3)在决定 $V_k(i)$ 值时所用的方法称为动态规划法．在后面第 11 章讨论金融中的最优化模型时还会用到它．

例 8.3a 定价一个具有如下参数的美式看跌期权：

$$s = 9, \quad t = 0.25, \quad K = 10, \quad \sigma = 0.3, \quad r = 0.06.$$

为了说明上述过程，取 $n=5$(要得到一个精确的近似值，这个 n 值显然太小)．利用上面的参数，有

$$\begin{aligned} u &= e^{0.3\sqrt{0.05}} = 1.0694, \\ d &= e^{-0.3\sqrt{0.05}} = 0.9351, \\ p &= 0.5056, \\ 1-p &= 0.4944, \\ \beta &= e^{-rt/n} = 0.997. \end{aligned}$$

在时刻 t_5 该证券所有可能的价格是

$$\begin{aligned} 9d^5 &= 6.435, \\ 9ud^4 &= 7.359, \\ 9u^2d^3 &= 8.416, \\ 9u^3d^2 &= 9.625, \\ 9u^i d^{5-i} &> 10 \quad (i = 4,5). \end{aligned}$$

140

因此，

$$\begin{aligned} V_5(0) &= 3.565, \\ V_5(1) &= 2.641, \\ V_5(2) &= 1.584, \\ V_5(3) &= 0.375, \\ V_5(i) &= 0 \quad (i = 4,5). \end{aligned}$$

因为 $9u^2d^2=9$，等式(8-1)给出了

$$V_4(2) = \max(1, \beta p V_5(3) + \beta(1-p) V_5(2)) = 1,$$

这个式子说明在时刻 t_4 如果证券的价格是9，那么执行该期权是最优的. 从注1) b)知，如果该时刻证券价格低于9，也应该执行期权. 又因为

$$V_4(1) = 10 - 9ud^3 = 2.130$$

以及

$$V_4(0) = 10 - 9d^4 = 3.119,$$

当 $9u^3d=10.293$ 时，由等式(8-1)有

$$V_4(3) = \beta p V_5(4) + \beta(1-p)V_5(3) = 0.181.$$

类似地

$$V_4(4) = \beta p V_5(5) + \beta(1-p)V_5(4) = 0.$$

继续下去，就得到

$$V_3(0) = \max(2.641, \beta p V_4(1) + \beta(1-p)V_4(0)) = 2.641,$$
$$V_3(1) = \max(1.584, \beta p V_4(2) + \beta(1-p)V_4(1)) = 1.584,$$
$$V_3(2) = \max(0.375, \beta p V_4(3) + \beta(1-p)V_4(2)) = 0.584,$$
$$V_3(3) = \beta p V_4(4) + \beta(1-p)V_4(3) = 0.089.$$

类似地

$$V_2(0) = \max(2.130, \beta p V_3(1) + \beta(1-p)V_3(0)) = 2.130,$$
$$V_2(1) = \max(1, \beta p V_3(2) + \beta(1-p)V_3(1)) = 1.075,$$

141

$$V_2(2) = \beta p V_3(3) + \beta(1-p)V_3(2) = 0.333,$$

以及

$$V_1(0) = \max(1.584, \beta p V_2(1) + \beta(1-p)V_2(0)) = 1.592,$$
$$V_1(1) = \max(0.375, \beta p V_2(2) + \beta(1-p)V_2(1)) = 0.698,$$

由上面最后两个式子，就可以得到所求的结果.

$$V_0(0) = \max(1, \beta p V_1(1) + \beta(1-p)V_1(0)) = 1.137.$$

即，看跌期权的风险中性价格近似为1.137.（精确到千分位时的确切结果是1.126. 它表明即使 n 比较小也能获得很满意的近似.） □

8.4 在几何布朗运动中加入跳跃

用几何布朗运动作为证券价格模型有一个缺点，就是它不允许价格有向上或者向下的不连续跳跃存在.（在几何布朗运动模型下，从理论上讲，价格有一个跳跃的概率等于0.）然而这样的跳跃在实际中又确实存在，所以考虑在几何布朗运动中加入一些随机的跳跃，以之作为新的价格模型可能会更准确. 下面就考虑这样的模型.

首先，考虑发生跳跃的时间. 假设对于某个正数 λ，当 h 足够小时，在任何

长度为 h 的时间区间内发生一次跳跃的概率近似地等于 λh. 而且，假定这个概率不随先前跳跃的任何信息而变化. 如果令 $N(t)$ 表示时刻 t 之前发生过的跳跃次数，那么按前面的假设，$N(t)$，$t\geqslant 0$，就称为泊松过程，它可以表示为

$$P\{N(t)=n\}=\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},\quad n=0,1,\cdots.$$

进一步，还假设当第 i 次跳跃发生时证券的价格变为原来的价格乘上 J_i，其中 J_1，J_2，…是独立且具有共同指定概率分布的随机变量. 此外，假设这个序列与跳跃发生的时间是相互独立的. 142

为完成对证券价格过程的描述，令 $S(t)$ 表示该证券在时刻 t 的价格，并且假设

$$S(t)=S^*(t)\prod_{i=1}^{N(t)}J_i,\quad t\geqslant 0,$$

其中 $S^*(t),t\geqslant 0$ 是一个波动参数为 σ、漂移参数为 μ 的几何布朗运动，它和 J_i 以及跳跃所发生的时间都是相互独立的. 当 $N(t)=0$ 时，其中的 $\prod_{i=1}^{N(t)}J_i$ 就定义为 1.

为找到这个价格变化过程的风险中性概率，令

$$J(t)=\prod_{i=1}^{N(t)}J_i.$$

在 8.7 节中将证明

$$E[J(t)]=\mathrm{e}^{-\lambda t(1-E[J])},\tag{8-2}$$

其中 $E[J]=E[J_i]$ 是跳跃大小的期望值. 由于 $S^*(t)$，$t\geqslant 0$ 是一个参数为 σ 和 μ 的几何布朗运动，故有

$$E[S^*(t)]=S^*(0)\mathrm{e}^{(\mu+\sigma^2/2)t}.$$

因此

$$\begin{aligned}E[S(t)]&=E[S^*(t)J(t)]\\&=E[S^*(t)]E[J(t)]\quad(\text{由独立性})\\&=S^*(0)\mathrm{e}^{(\mu+\sigma^2/2-\lambda(1-E[J]))t}.\end{aligned}$$

如果有

$$\mu+\sigma^2/2-\lambda(1-E[J])=r.$$

那么购买证券的赌博将是公平赌博(即 $E[S(t)]=S(0)\mathrm{e}^{rt}$). 也就是说，当几何布朗运动 $S^*(t)$，$t\geqslant 0$ 的漂移参数 μ 由

$$\mu=r-\sigma^2/2+\lambda-\lambda E[J]$$ 143

给出时，就可以得到证券价格过程的风险中性概率. 根据套利定理，如果所有

的期权相对前面这个风险中性概率都被公平定价，那么套利就不可能存在. 例如，一个在时刻 t 到期，执行价是 K 的欧式看涨期权的无套利价格可由下式给出

$$\begin{aligned}
\text{无套利价格} &= E[e^{-rt}(S(t)-K)^+] \\
&= e^{-rt}E[(J(t)S^*(t)-K)^+] \\
&= e^{-rt}E[(J(t)se^W-K)^+],
\end{aligned} \tag{8-3}$$

其中 $s=S^*(0)$ 是证券的初始价格，W 是一个均值为 $(r-\sigma^2/2+\lambda-\lambda E[J])t$、方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量.

下面的 8.4.1 节将估计 J_i 为对数正态随机变量时等式(8-3)的值，其后的 8.4.2 节中将推导出跳跃大小具有一般分布时的近似值. 与前面一样，$C(s, t, K, \sigma, r)$ 是 Black-Scholes 公式导出的价格.

8.4.1 对数正态跳跃分布

如果跃度 J_i 服从均值是 μ_0 方差是 σ_0^2 的对数正态分布，那么

$$E[J] = \exp\{\mu_0+\sigma_0^2/2\}.$$

令

$$X_i = \log(J_i),\quad i\geqslant 1,$$

那么 X_i 就是均值为 μ_0、方差为 σ_0^2 的相互独立的正态随机变量. 而且，

$$J(t) = \prod_{i=1}^{N(t)} J_i = \prod_{i=1}^{N(t)} e^{X_i} = \exp\Big\{\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\Big\}.$$

因此，利用等式(8-3)，可得一个在时刻 t 到期，执行价是 K 的欧式看涨期权的无套利价格为

$$\text{无套利价格} = e^{-rt}E\Big[\Big(s\exp\Big\{W+\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\Big\}-K\Big)^+\Big], \tag{8-4}$$

其中 s 是证券的初始价格. 现在假设在时刻 t 之前总共有 n 次跳跃. 即，假设 $N(t)=n$. 那么，$W+\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ 是一个正态随机变量，它的均值和方差由下式给出：

144

$$E\Big[W+\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \mid N(t)=n\Big] = (r-\sigma^2/2+\lambda-\lambda E[J])t+n\mu_0,$$

$$\mathrm{Var}\Big(W+\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \mid N(t)=n\Big) = t\sigma^2+n\sigma_0^2.$$

如果设

$$\sigma^2(n) = \sigma^2+n\sigma_0^2/t$$

且令

$$r(n)=r-\sigma^2/2+\lambda-\lambda E[J]+\frac{n\mu_0}{t}+\sigma^2(n)/2$$

$$=r+\lambda-\lambda E[J]+\frac{n}{t}(\mu_0+\sigma_0^2/2)$$

$$=r+\lambda-\lambda E[J]+\frac{n}{t}\log(E[J]),\qquad (8\text{-}5)$$

那么当 $N(t)=n$ 时，$W+\sum_{i=1}^{N(t)}X_i$ 是一个方差为 $t\sigma^2(n)$、均值是 $(r(n)-\sigma^2(n)/2)t$ 的正态随机变量. 但这意味着，当 $N(t)=n$ 时

$$e^{-r(n)t}E\left[\left(s\exp\left\{W+\sum_{i=1}^{N(t)}X_i\right\}-K\right)^+ \mid N(t)=n\right]$$

$$=C(s,t,K,\sigma(n),r(n)).$$

把上面等式左右两边同时乘以 $e^{(r(n)-r)t}$，有

$$e^{-rt}E\left[\left(s\exp\left\{W+\sum_{i=1}^{N(t)}X_i\right\}-K\right)^+ \mid N(t)=n\right]$$

$$=e^{(r(n)-r)t}C(s,t,K,\sigma(n),r(n)).$$

等式(8-4)表明，如果已知时刻 t 之前有 n 次跳跃，那么上面的表达式就是所需的期望值. 因而无条件期望值应该等于这些量的加权平均(可以证明这个结论是正确的)，其中的权重等于事件 $N(t)=n$ 的概率. 即 145

$$\text{无套利价格}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{(r(n)-r)t}C(s,t,K,\sigma(n),r(n))$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda tE[J]}(E[J])^n\frac{(\lambda t)^n}{n!}C(s,t,K,\sigma(n),r(n))$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda tE[J]}\frac{(\lambda tE[J])^n}{n!}C(s,t,K,\sigma(n),r(n)).\ (\text{由式}(8\text{-}5))$$

综上所述，有下面的定理.

定理 8.4.1 如果所有跳跃都服从均值参数为 μ_0、方差参数为 σ_0^2 的对数正态分布，那么一个到期日是 t，执行价是 K 的欧式看涨期权的无套利价格由下式给出

$$\text{无套利价格}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda tE[J]}\frac{(\lambda tE[J])^n}{n!}C(s,t,K,\sigma(n),r(n)),$$

其中

$$\sigma^2(n)=\sigma^2+n\sigma_0^2/t,$$

$$r(n)=r+\lambda(1-E[J])+\frac{n}{t}\log(E[J]),$$

且

$$E[J]=\exp\{\mu_0+\sigma_0^2/2\}.$$

注 尽管定理8.4.1涉及一个无穷级数，但是在大多数应用中，由于λ（跳跃发生率）比较小，因而该级数收敛也较快.

8.4.2 一般跳跃分布

等式(8-3)表明，一个到期日是t，执行价是K的欧式看涨期权的无套利价格为：

146

$$\text{无套利价格} = e^{-rt}E[(J(t)se^{W}-K)^{+}],$$

其中s是证券在0时刻的价格，W是一个均值为$(r-\sigma^2/2+\lambda-\lambda E[J])t$，方差为$t\sigma^2$的正态随机变量. 如果令

$$W^{*} = W-\lambda t(1-E[J])$$

以及

$$s_t = s\,e^{\lambda t(1-E[J])} = \frac{s}{E[J(t)]},$$

那么

$$\text{无套利价格} = E[e^{-rt}(s_tJ(t)e^{W^{*}}-K)^{+}].$$

因为W^{*}是一个均值为$(r-\sigma^2/2)t$、方差是$t\sigma^2$的正态随机变量，所以有

$$\text{无套利价格} = E[C(s_tJ(t),t,K,\sigma,r)]. \tag{8-6}$$

由于$C(s, t, K, \sigma, r)$关于s为凸函数，根据已知的詹森(Jensen)不等式(参看9.2节)有

$$E[C(s_tJ(t),t,K,\sigma,r)]\geqslant C(E[s_tJ(t)],t,K,\sigma,r) = C(s,t,K,\sigma,r),$$

这表明跳跃模型中的无套利价格，不会比同样模型无跳跃时的价格低.（事实上，如果有$P\{J_i=1\}\neq 1$，那么在跳跃模型中的价格会绝对地大.）

利用下面的方法可以得到此无套利价格的近似值. 首先把$C(x)=C(x, t, K, \sigma, r)$只看作是$x$的函数(其他变量保持不变)，把它在某个点$x_0$按泰勒级数展开，然后忽略不计第三项以后的全部项得到

$$C(x)\approx C(x_0)+C'(x_0)(x-x_0)+C''(x_0)(x-x_0)^2/2.$$

因此，对于任何非负的随机变量X，有

$$C(X)\approx C(x_0)+C'(x_0)(X-x_0)+C''(x_0)(X-x_0)^2/2.$$

令$x_0=E[X]$并对上式左右两边同时取期望得到

147

$$E[C(X)]\approx C(E[X])+C''(E[X])\mathrm{Var}(X)/2.$$

令

$$X = s_tJ(t),\quad E[X] = s,$$

则

$$E[C(s_tJ(t))]\approx C(s)+C''(s)s_t^2\mathrm{Var}(J(t))/2.$$

可以证明(见 8.7 节)

$$\mathrm{Var}(J(t))=\mathrm{e}^{-\lambda t(1-E[J^2])}-\mathrm{e}^{-2\lambda t(1-E[J])},\tag{8-7}$$

其中 J 的概率分布和 J_i 相同. 因此，利用 7.5 节所推导出的关于 $C''(s)$ 的公式(该公式在那里被称为 gamma)，可以得到如下定理中给出的近似值，此定理是本小节所有结果的综合.

定理 8.4.2 假设跳跃的大小服从一般的分布，那么

$$\begin{aligned}\text{期权的无套利价格}&=E[C(s_tJ(t),t,K,\sigma,r)]\\&\geqslant C(s,t,K,\sigma,r).\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}&\text{期权的无套利价格}\\&\approx C(s,t,K,\sigma,r)+s_t^2[\mathrm{e}^{-\lambda t(1-E[J^2])}-\mathrm{e}^{-2\lambda t(1-E[J])}]\frac{1}{2s\sigma\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\omega^2/2}\\&=C(s,t,K,\sigma,r)+s^2(\mathrm{e}^{\lambda t(1-2E[J]+E[J^2])}-1)\frac{1}{2s\sigma\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\omega^2/2},\end{aligned}$$

其中

$$s_t=s\,\mathrm{e}^{\lambda t(1-E[J])},$$

而

$$\omega=\frac{rt+\sigma^2t/2-\log(K/s)}{\sigma\sqrt{t}}.$$

8.5 估计波动参数

在运用 Black-Scholes 公式时，所需五个参数中的四个，即 s，t，K 和 r 都是已知的量，而 σ 的值则需要进行估计. 其中一种方法就是使用历史数据来估计. 8.5.1 节给出了估计一个总体方差的标准方法；8.5.2 节是根据一般时间上证券的每日收盘价，应用前面的标准方法得出 σ 的一个估计量；8.5.3 节基于每日的收盘价和开盘价这两个价格给出了一个改进的估计量；8.5.4 节则给出了一个更为复杂的估计量，它用到了每日的最高价和最低价以及每日的开盘价和收盘价. [148]

8.5.1 估计总体的均值和方差

假设 X_1，…，X_n 是相互独立的随机变量，它们有相同的概率分布，均值是 μ_0、方差是 σ_0^2. 这些数据的平均值

$$\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$$

是期望的估计值. 由于

$$\sigma_0^2 = \mathrm{Var}(X_i) = E[(X_i - \mu_0)^2],$$

那么 σ_0^2 就可以由下式来估计

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{n}.$$

然而，当均值 μ_0 未知时这个估计量不能直接应用. 为了能用它，首先把未知的 μ_0 代换成它的估计量 $\overline{X}$. 再用 $n-1$ 代替 n，就得到了样本方差 S^2，其定义为

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}.$$

样本方差就是方差 σ_0^2 的标准估计量，并且它是 σ_0^2 的一个无偏估计量，即

$$E[S^2] = \sigma_0^2.$$

(把分母从 n 变为 $n-1$ 是为了得到无偏估计量.)把 S^2 作为方差估计量的有效性可以用均方误差(MSE)来衡量，它的定义是

149

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE} &= E[(S^2 - \sigma_0^2)^2] \\ &= \mathrm{Var}(S^2).\end{aligned}$$

当 X_i 来自一个正态分布时，可以证明

$$\mathrm{Var}(S^2) = \frac{2\sigma_0^4}{n-1}. \tag{8-8}$$

8.5.2 波动率的标准估计量

如果想用 t 个单位时间的历史数据来估计 σ，不妨设是从 0 时刻到 t 时刻. 也就是说，现在的时间是 t，历史的价格数据是 $S(y)$，$0 \leqslant y \leqslant t$. 固定一个正整数 n，令 $l = t/n$ 并定义随机变量

$$X_1 = \log\left(\frac{S(l)}{S(0)}\right),$$

$$X_2 = \log\left(\frac{S(2l)}{S(l)}\right),$$

$$X_3 = \log\left(\frac{S(3l)}{S(2l)}\right),$$

$$\vdots$$

$$X_n = \log\left(\frac{S(nl)}{S((n-1)l)}\right).$$

假设证券的价格变化服从参数是 μ 和 σ 的几何布朗运动，那么 X_1，…，X_n 是期

望为 $l\mu$、方差为 $l\sigma^2$ 的独立正态随机变量. 由 8.5.1 节知可以用 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2/(n-1)$ 来估计 $l\sigma^2$. 于是可以用

$$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{l}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$$

来估计 σ^2. 此外，由等式(8-8)有

$$\mathrm{Var}(\widehat{\sigma^2})=\frac{1}{l^2}\frac{2(l\sigma^2)^2}{n-1}=\frac{2\sigma^4}{n-1}. \tag{8-9}$$

根据等式(8-9)，就可以用任一时间段内的历史价格数据来得到 σ^2 的一个精确的估计值. 也就是说，把时间段分割成很多小的子区间就可以得到 σ^2 的一个无偏估计量，而这个估计量的方差可以任意地小. 然而，这种方法的困难之处在于，它强烈地依赖于下面的假设：价格比率 $S(il)/S((i-1)l)$ 的对数是独立同分布的，即使当时间间隔 l 任意小时也如此. 事实上，如果一个证券的历史价格和一个几何布朗运动相类似，即使在微观下看它们也是不一样的. 换句话说，即使连续每天的收盘价格可能和一个几何布朗运动相吻合，但是对于每小时的价格(或者更小间隔的价格)变化，该假设很可能就不成立了. 所以，前面程序中所用的 l 最好等于一天. 因为时间的单位是一年，而在一年中大概有 252 天的交易日，所以 $l=1/252$.

150

为使用这个模型来估计 σ，假设连续 n 天的日收盘价为 C_1，…，C_n，其中 C_i 是在第 i 个交易日的收盘价. 令 C_0 表示证券在这 n 天之前一瞬间的收盘价，并且令

$$X_i=\log\left(\frac{C_i}{C_{i-1}}\right)=\log(C_i)-\log(C_{i-1}).$$

这些数据的样本方差

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$$

可以作为 $\sigma^2/252$ 的估计量；$S\sqrt{252}$ 可以用来估计 σ.

注 如果 μ 和 σ 是几何布朗运动的漂移参数和波动参数，那么

$$E\left[\log\left(\frac{C_i}{C_{i-1}}\right)\right]=\frac{\mu}{252},\quad \sqrt{\mathrm{Var}\left(\log\left(\frac{C_i}{C_{i-1}}\right)\right)}=\frac{\sigma}{\sqrt{252}}.$$

因为典型的 μ 的值接近于 0，而 σ 的典型的值大于 0.2，所以 $X_i=\log(C_i/C_{i-1})$ 的期望相对于它的标准差可以忽略不计. 从而，可以用 0 来近似 μ 而用

151

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$$

作为 $\sigma^2/252$ 的估计量只会产生很小的效率损失．注意下面这个事实很重要，那就是即使几何布朗运动有一个随时间变化的漂移参数，这个估计量也依然能使用．（回忆即使在漂移参数随时间变化的情形，Black-Scholes 公式仍然能够给出唯一的无套利价格.）

8.5.3 使用开盘数据和收盘数据

令 C_i 表示在第 i 个交易日结束时证券的(收盘)价格．在假设证券价格服从几何布朗运动的情况下，$\log(C_i/C_{i-1})$是正态随机变量，它的期望近似为 0，方差是 $\sigma^2/252$．令 O_i 表示第 i 个交易日开始时证券的(开盘)价格，则

$$\log\left(\frac{C_i}{C_{i-1}}\right) = \log\left(\frac{C_i}{O_i}\frac{O_i}{C_{i-1}}\right) = \log\left(\frac{C_i}{O_i}\right) + \log\left(\frac{O_i}{C_{i-1}}\right).$$

又设 C_i/O_i 和 O_i/C_{i-1}是相互独立的，即，在一个交易日内价格的变化率和交易日结束时价格的变化率是相互独立的，那么

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\log(C_i/C_{i-1})) &= \mathrm{Var}(\log(C_i/O_i)) + \mathrm{Var}(\log(O_i/C_{i-1})) \\ &= \mathrm{Var}(C_i^* - O_i^*) + \mathrm{Var}(O_i^* - C_{i-1}^*),\end{aligned} \tag{8-10}$$

其中

$$C_j^* = \log(C_j), \quad O_j^* = \log(O_j).$$

由于 $C_i^* - O_i^*$ 和 $O_i^* - C_{i-1}^*$都有一个近似为 0 的期望，所以可以用

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(C_i^* - O_i^*)^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(O_i^* - C_{i-1}^*)^2}{n}$$

来估计 $\sigma^2/252 = \mathrm{Var}(\log(C_i/C_{i-1}))$．这就得到了波动参数 σ 的估计量 $\hat{\sigma}$

152

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{252}{n}\sum_{i=1}^{n}[(C_i^* - O_i^*)^2 + (O_i^* - C_{i-1}^*)^2]}. \tag{8-11}$$

等式(8-11)应该比 8.5.2 节中所讲的 σ 标准估计量更好.

8.5.4 使用开盘数据、收盘数据和最高最低数据

和 8.5.3 节中所使用的记号一样，对任意 X，令 $X^* = \log(X)$.

用 $H(t)$表示证券在长度为 t 的时间段内的最高价格，$L(t)$表示它的最低价格．即

$$H(t) = \max_{0 \le y \le t} S(y),$$
$$L(t) = \min_{0 \le y \le t} S(y).$$

假设证券的价格服从漂移参数是 0，波动率是 σ 的几何布朗运动，那么

$$E[(H^*(t) - L^*(t))^2] = 2.773\mathrm{Var}\left(\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)\right).$$

现在令 O_i 和 C_i 分别表示在第 i 个交易日的开盘价和收盘价，令 H_i 和 L_i 分别表示当天的最高价和最低价. 由于 $E[\log(C_i/O_i)]\approx 0$，故可以把一个交易日中的历史价格近似地看成一个漂移参数是 0 的几何布朗运动. 因此，利用前面的恒等式有

$$E[(H_i^* - L_i^*)^2] \approx 2.773\mathrm{Var}(\log(C_i/O_i)).$$

再使用 n 天的数据值，就可以用估计量

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2.773}\frac{\sum_{i=1}^{n}(H_i^* - L_i^*)^2}{n} = \frac{0.361}{n}\sum_{i=1}^{n}(H_i^* - L_i^*)^2$$

来估计 $\mathrm{Var}(\log(C_i/O_i))$.

当然，$\mathrm{Var}(\log(C_i/O_i)) = \mathrm{Var}(C_i^* - O_i^*)$ 也可以用下面的式子来估计

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(C_i^* - O_i^*)^2.$$

153

这些估计量以下形式的任意线性组合

$$\alpha\varepsilon_1 + (1-\alpha)\varepsilon_2$$

都可以用来估计 $\mathrm{Var}(\log(C_i/O_i))$. 可以证明当 $\alpha=0.5/0.361=1.39$ 时，所得到的是这一类估计量之中的最优者(它的方差最小). 也就是说，$\mathrm{Var}(\log(C_i/O_i))$ 的最优估计量是

$$\varepsilon = \frac{0.5}{0.361}\varepsilon_1 - 0.39\varepsilon_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[0.5(H_i^* - L_i^*)^2 - 0.39(C_i^* - O_i^*)^2]. \tag{8-12}$$

由于可以用 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(O_i^* - C_{i-1}^*)^2$ 来估计 $\mathrm{Var}(\log(C_i/O_i)) = \mathrm{Var}(C_i^* - O_{i-1}^*)$，所以

$$\varepsilon + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(O_i^* - C_{i-1}^*)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[0.5(H_i^* - L_i^*)^2 - 0.39(C_i^* - O_i^*)^2 + (O_i^* - C_{i-1}^*)^2]$$

是

$$\mathrm{Var}(\log(C_i/O_i)) + \mathrm{Var}(\log(O_i/C_{i-1})) = \mathrm{Var}(\log(C_i/C_{i-1})) = \sigma^2/252$$

的一个估计量. 因此就可以用

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{252}{n}\sum_{i=1}^{n}[0.5(H_i^* - L_i^*)^2 - 0.39(C_i^* - O_i^*)^2 + (O_i^* - C_{i-1}^*)^2]} \tag{8-13}$$

来估计波动参数 σ.

注 等式(8-13)所给出的 σ 的估计量在以前的文献中没有出现过. 这里所用的方法建立在 Garman 和 Klass 的论文(见参考文献[2])之上, 他们推导了由等式(8-12)给出的 $\mathrm{Var}(\log(C_i/O_i))$ 的估计量. 然而, 在他们更进一步的分析中, 不仅假设当市场开放交易时证券的价格服从几何布朗运动, 而且还假设当市场关闭时它也服从同样的几何布朗运动(尽管现在观察不到). 基于这些假设他们提议使用下面的等式:

154

$$\mathrm{Var}(C_i^* - O_i^*) = \frac{1-f}{252}\sigma^2,$$

$$\mathrm{Var}(O_i^* - C_{i-1}^*) = \frac{f}{252}\sigma^2,$$

其中 f 是一天之中市场关闭时间所占的比例. 然而, 关于市场关闭时证券价格变化与市场开放时服从同样的概率分布的假设似乎很值得怀疑. 所以我们就选择了一个相对弱的假设, 即假定价格的变化率 O_i/C_{i-1} 和第 $i-1$ 天之前所有的市场关闭时的价格相互独立.

8.6 一些评论

8.6.1 期权实际价格异于 Black-Scholes 价格时

现在假设已经估计出 σ 的值, 并将其代入 Black-Scholes 公式计算出了 $C(s, t, K, \sigma, r)$的值. 如果市场中期权的实际价格不等于 $C(s, t, K, \sigma, r)$将会怎样? 实际中真的存在一个投资策略可以稳赢吗?

很不幸, 这个问题的答案是"可能不存在". 其一, 当期权实际交易的价格与由 Black-Scholes 公式所得到的价格不一致时, 套利策略要求对标的证券连续地进行交易(买或卖). 这不仅在实际中是不可能的, 而且即使可以用离散的交易去近似连续交易, 由此所产生的交易费用也将会非常大从而很容易就超出了套利所获得的利润; 其二, 即使相信所估计的 σ 历史值非常精确, 但是它在期权有效期内也可能会发生变化. 事实上, 市场价格与由公式所得的价格不同的一个原因,

很有可能就是因为“市场”相信，在期权有效期内股票的波动率将会和它以前的值不同. 实际上，这也表明，代替用历史数据估计证券波动率，可通过下面的途径得到一个更精确的估计量，即求 σ 的一个估计值. 它和其他几个期权参数(s，t，K，r)一起使得由 Black-Scholes 公式所确定的价格就等于市场中期权的实际价格. 不过，使用这种隐含波动率的困难在于，同一个证券有不同的期权，要么它们的到期日不同，要么它们的执行价不同，或者这两者都不相同. 这些情况就会产生隐含波动率 σ 的不同估计值. 但是有一个共同的现象，从虚值看涨期权(指当前证券的市场价格比期权的交割价低得多)推导出的隐含波动率，要比从平价期权(指当前证券的市场价格在交割价附近)得到的值大得多. 对于用历史数据估计波动率所获得的 Black-Scholes 价格，上述论证说明，虚值看涨期权相对平价看涨期权，其价值高估了. 不能稳赢的第三个原因是，假设标的证券服从几何布朗运动仅仅是对实际情况的一种近似，而且，即便忽略了交易费用，套利策略的存在也要依赖于这个假设. 而实际中很多的交易商不同意几何布朗运动的假设：未来价格变化与以前的价格相互独立. 相反他们认为以前的价格经常是未来价格向上或者向下变化趋势的一个先兆.

155

8.6.2 利率发生变化时

前面已经证明了期权的价格关于利率是一个增函数. 这是否意味着，当中央银行宣布提高利率时期权的价格应该增加，而当它宣布降低利率(关于美国的国债)时价格应该下降呢？如果证券的波动率保持不变的话，那么答案就是肯定的. 然而，当利率变化而此时证券的波动率保持不变时，就应该非常小心. 因为利率上升就会对一些投资者产生影响，使得他们从选择投资股票转向投资国库券或者其他固定收益的证券，而当利率下降时则会出现相反的现象；这样的一些行为有可能导致证券的波动率发生变化.

8.6.3 最后的评论

如果认为几何布朗运动是一个合理的(尽管是近似的)模型，那么 Black-Scholes 公式就给出了一个合理的期权价格. 如果这个价格比市场价格显著地高(或者低)，那么通过买(或者卖)期权和卖(或者买)标的证券就可以得到一个套利机会. 这种策略，虽然不一定总能赢，但通常会有一个期望值为正而方差很小的收益.

156

假设证券的价格服从一个参数是 μ 和 σ 的几何布朗运动，在这个假设下，即使期权的价格和 Black-Scholes 公式给出的价格一样，通常也可以使用这个策略来获得一个期望为正而且风险相对较小的收益. 因为此时假设，人们基于经验数据估计会相信参数 μ 不等于风险中性价值 $r-\sigma^2/2$. 如果

$$\mu > r - \sigma^2/2,$$

那么购买证券和购买期权都会得到正的期望收益. 尽管不能避免所有的风险(因为无套利是可能的)，但通过下面两个方法均可实现一个期望收益为正的低风险策略：a)引入一个风险厌恶效用函数，再寻找一个策略使得效用的期望值达到最大；b)寻找一个策略，它有一个相当大的期望收益和一个相当小的方差. 这样的策略就是购买一些证券并卖出一些期权，或者相反. 类似地，如果

$$\mu < r - \sigma^2/2,$$

那么购买证券和购买期权都会得到负的期望收益，同样我们还是要寻找一个低风险并且期望收益为正的策略，这个策略是卖出一个而买入另一个. 这种类型的问题将在下一章中考虑，同时还将介绍效用函数及其应用.

实际应用中可以对证券价格的几何布朗运动模型进行改进，与其盲目地假设这样一个模型，不如利用历史数据来拟合一个更普通的模型. 如果成功的话，改进的模型能够给出更精确的期权价格，从而得到更有效的策略. 本书最后两章将涉及这些更一般的模型. 第 14 章说明几何布朗运动和原油价格的实际数据并不一致；然后给出一个改进了的模型，这个模型允许第二天的收盘价不仅依赖于当天的收盘价而且还依赖于前一天的收盘价，同时给出了基于该模型的期权风险中性定价. 在第 15 章中，我们将证明，一个一般化的几何布朗运动模型会导致一个自回归模型，当证券价格具有均值回复性质时就可以用这个模型作为证券的价格模型.

157

8.7 附录

对于 8.4 节中的模型，需要推导当 $m=1$，2 时 $E[J^m(t)]$的表达式. 注意到

$$J^m(t) = \prod_{i=1}^{N(t)} J_i^m.$$

所以如果 $N(t)=n$，就有

$$\begin{aligned}
&E[J^m(t) \mid N(t) = n] \\
&= E\left[\prod_{i=1}^{N(t)} J_i^m \mid N(t) = n\right] \\
&= E\left[\prod_{i=1}^{n} J_i^m \mid N(t) = n\right] \\
&= E\left[\prod_{i=1}^{n} J_i^m\right] \quad (\text{由 } J_i \text{ 和 } N(t) \text{ 的独立性}) \\
&= (E[J^m])^n \quad (\text{由 } J_i \text{ 的独立性}).
\end{aligned}$$

于是，

$$E[J^m(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} E[J^m(t) \mid N(t) = n] P\{N(t) = n\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(E[J^m])^n e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}(\lambda t E[J^m])^n/n!$$

$$= e^{-\lambda t(1-E[J^m])}.$$

158

从而有

$$E[J(t)] = e^{-\lambda t(1-E[J])}$$

以及

$$\mathrm{Var}(J(t)) = E[J^2(t)] - (E[J(t)])^2 = e^{-\lambda t(1-E[J^2])} - e^{-2\lambda t(1-E[J])}.$$

8.8 习题

练习 8.1 证券分红时，欧式看涨和看跌期权的平价公式还成立吗？

练习 8.2 对于8.2.1节中的模型，在风险中性概率下，证券随时间变化的价格服从什么过程？

练习 8.3 求一个(K, t)看涨期权的无套利价格，这个期权的标的证券在时刻 $t_{d_i}(i=1, 2)$有分红 $fS(t_{d_i})$，其中 $t_{d_1}<t_{d_2}<t$.

练习 8.4 考虑一个美式(K, t)看涨期权，它的标的证券在时刻 t_d 有分红，其中 $t_d<t$. 证明这个看涨期权要么在时刻 t_d 之前的一瞬间执行，要么在到期日 t 执行.

练习 8.5 考虑一个欧式(K, t)看涨期权，它在到期日的收益以 B 为上限. 即在时刻 t 的回报为

$$\min((S(t)-K)^+, B).$$

说明你如何使用 Black-Scholes 公式来求这个期权的无套利价格.

提示：把这个期权的回报分成两项普通(没有上限的)欧式看涨期权的回报.

练习 8.6 证券当前的价格是 s. 考虑一项投资，它的支出是 s，对于一个给定的 β，它满足 $0<\beta<e^r-1$，在时刻 1 的回报由下式给出

$$\text{回报} = \begin{cases}(1+\beta)s & \text{若 } S(1) \leqslant (1+\beta)s, \\ (1+\beta)s + \alpha(S(1)-(1+\beta)s) & \text{若 } S(1) \geqslant (1+\beta)s.\end{cases}$$

159

如果这项投资(它的收益没有上限且总是比初始投资高)不允许有套利存在，求 α 的值.

练习 8.7 下面的投资是关于一个当前价格是 s 的证券. 对于一个初始的成本 s和一个选好的β值(满足$0<\beta<e^r-1$)，一年之后的回报由下面的式子给出

$$\text{回报} = \begin{cases}(1+\beta)s & \text{若 } S(1) \leqslant (1+\beta)s, \\ S(1) & \text{若}(1+\beta)s \leqslant S(1) \leqslant K, \\ K & \text{若 } S(1) > K,\end{cases}$$

其中 $S(1)$是一年结束时证券的价格. 也就是说，要保证在时刻 1 所得最大收益至少是 $1+\beta$ 倍于初始投资的收益. 证明当 K 满足

$$C(s,1,K,\sigma,r) = C(s,1,s(1+\beta),\sigma,r) + s(1+\beta)e^{-r} - s$$

时，这个投资(可卖或买)不会有套利机会存在. 其中 $C(s, t, K, \sigma, r)$是 Black-Scholes 价格.

练习 8.8 证明，对于 $f<r$,

$$C(se^{-ft},t,K,\sigma,r) = e^{-ft}C(s,t,K,\sigma,r-f).$$

练习 8.9 一个期权的期权，有时称为复合期权，是由参数对(K_1, t_1)和(K, t)给定的，其中 $t_1<t$. 复合期权的持有者有权利以价格 K_1 购买一个特定证券的(K, t)看涨期权. 购买(K, t)看涨期权的期权可以在时刻 t_1 之前的任意时间执行.

a)证明购买(K, t)看涨期权的期权永远不会在到期日 t_1 之前被执行.

b)证明当且仅当 $S(t_1)\geqslant x$ 时，这个购买(K, t)看涨期权的期权应该被执行，这里 x 是下面方程的解

160

$$K_1 = C(x,t-t_1,K,\sigma,r),$$

其中 $C(s, t, K, \sigma, r)$由 Black-Scholes 公式所给，$S(t_1)$是证券在时刻 t_1 的价格.

c)证明存在唯一的 x 值满足上面的方程.

d)证明这个复合期权的唯一无套利价格可以表示为

$$\text{复合期权的无套利价格} = e^{-rt_1}E[C(se^W,t-t_1,K,\sigma,r)I(se^W > x)],$$

其中：$s=S(0)$是证券的初始价格；x 是 b)中所给的值；W 是一个均值是$(r-\sigma^2/2)t_1$、方差是 $\sigma^2 t_1$ 的正态随机变量；如果 $se^W> x$，$I(se^W>x)$定义为 1，否则就定义为 0；$C(s, t, K, \sigma, r)$为 Black-Scholes 价格. (此无套利价格公式可以简化成只涉及二元正态分布的一个表达式.)

练习 8.10 一个(K_1, t_1, K_2, t_2)双重看涨期权就是这样一个期权，它既可以在时刻 t_1 以执行价 K_1 执行，也可以在时刻 t_2 以执行价 K_2 执行$(t_2>t_1)$.

a)证明如果 $K_1>e^{-r(t_2-t_1)}K_2$，那么永远不会在时刻 t_1 执行该期权.

b)假设 $K_1<e^{-r(t_2-t_1)}K_2$，证明存在一个 x 值使得：如果 $S(t_1)>x$，那么期权应该在时刻 t_1 执行，而如果 $S(t_1)<x$，则不应该在时刻 t_1 执行期权.

练习 8.11 扩展图 8-1，使它给出时刻 t_0，t_1，t_2，t_3，t_4 可能的价格模式.

练习 8.12 使用8.3节中的记号，下面的观点中哪些是正确的? 并说明原因.

a)固定 i，$V_k(i)$关于 k 是单调不减的.

b)固定 i，$V_k(i)$关于 k 是单调不增的.

c)固定 k，$V_k(i)$关于 i 是单调不减的.

d)固定 k，$V_k(i)$关于 i 是单调不增的.

练习 8.13 一个欧式看跌期权，它的参数与例 8.3a 中给出的相同，求它的

风险中性价格.

161

练习 8.14 一个美式看跌期权，它的参数如下：

$$s = 10,\quad t = 0.25,\quad K = 10,\quad \sigma = 0.3,\quad r = 0.06.$$

导出这个期权风险中性价格的近似值.

练习 8.15 一个美式的资产或无价值(asset-or-nothing)期权(参数是 K，F，到期日为 t)可以在 t 之前的任何时刻执行. 当期权被执行时，如果证券的价格是 K 或者更高，就可以得到 F；而如果此时证券的价格低于 K，则什么也得不到. 说明如何用一个多时期二项模型来近似一个美式资产或无价值(asset-or-nothing)看涨期权的风险中性价格.

练习 8.16 当

$$s = 10,\quad t = 0.25,\quad K = 11,\quad F = 20,\quad \sigma = 0.3,\quad r = 0.06$$

时，导出一个美式资产或无价值(asset-or-nothing)看涨期权风险中性价格的近似值.

练习 8.17 表8-1提供了从2001年 8 月 13 日到 2001 年 11 月 1 日微软股票价格的数据.

a)利用这个表中的数据和8.5.2节中的估计量来估计 σ.

b)使用 8.5.3 节中的估计量来估计 σ.

c)使用8.5.4节中的估计量来估计 σ.

表 8-1

日期	开盘数据	最高数据	最低数据	收盘数据	交易量
01/11/12	64.7	66.44	63.65	65.79	28 876 400
01/11/9	64.34	65.65	63.91	65.21	24 006 800
01/11/8	64.46	66.06	63.66	64.42	37 113 900
01/11/7	64.22	65.05	64.03	64.25	29 449 500
01/11/6	62.7	64.94	62.16	64.78	34 306 000
01/11/5	61.86	64.03	61.75	63.27	33 200 800
01/11/2	61.93	63.02	60.51	61.4	41 680 000
01/11/1	60.08	62.25	59.6	61.84	54 835 600
01/10/31	59.3	60.73	58.1	58.15	32 350 000
01/10/30	58.92	59.54	58.19	58.88	28 697 800
01/10/29	62.1	62.2	59.54	59.64	27 564 700
01/10/26	62.32	63.63	62.08	62.2	32 254 700
01/10/25	60.61	62.6	59.57	62.56	37 659 100
01/10/24	60.5	61.62	59.62	61.32	39 570 700
01/10/23	60.47	61.44	59.4	60.43	40 162 500
01/10/22	57.9	60.18	57.47	60.16	36 161 800
01/10/19	57.4	58.01	55.63	57.9	45 609 800

（续）

日期	开盘数据	最高数据	最低数据	收盘数据	交易量
01/10/18	56.34	57.58	55.5	56.75	39 174 000
01/10/17	59.12	59.3	55.98	56.03	36 855 300
01/10/16	57.87	58.91	57.21	58.45	33 084 500
01/10/15	55.9	58.5	55.85	58.06	34 218 500
01/10/12	55.7	56.64	54.55	56.38	31 653 500
01/10/11	55.76	56.84	54.59	56.32	41 871 300
01/10/10	53.6	55.75	53.0	55.51	43 174 600
01/10/9	57.5	57.57	54.19	54.56	49 738 800
01/10/8	56.8	58.65	56.74	58.04	30 302 900
01/10/5	56.16	58.0	54.94	57.72	40 422 200
01/10/4	56.92	58.4	56.21	56.44	50 889 000
01/10/3	52.48	56.93	52.4	56.23	48 599 600
01/10/2	51.63	53.55	51.56	53.05	40 430 400
01/10/1	50.94	52.5	50.41	51.79	34 999 800
01/9/28	49.62	51.59	48.98	51.17	58 320 600
01/9/27	50.1	50.68	48.0	49.96	40 595 600
01/9/26	51.51	51.8	49.55	50.27	29 262 200
01/9/25	52.27	53.0	50.16	51.3	42 470 300
01/9/24	50.65	52.45	49.87	52.01	42 790 100
01/9/21	47.92	50.6	47.5	49.71	92 488 300
01/9/20	52.35	52.61	50.67	50.76	58 991 600
01/9/19	54.46	54.7	50.6	53.87	63 475 100
01/9/18	53.41	55.0	53.17	54.32	41 591 300
01/9/17	54.02	55.1	52.8	52.91	63 751 000
01/9/10	54.92	57.95	54.7	57.58	42 235 900
01/9/7	56.11	57.36	55.31	55.4	44 931 900
01/9/6	56.56	58.39	55.9	56.02	56 178 400
01/9/5	56.18	58.39	55.39	57.74	44 735 300
01/9/4	57.19	59.08	56.07	56.1	33 594 600
01/8/31	56.85	58.06	56.3	57.05	28 950 400
01/8/30	59.04	59.66	56.52	56.94	48 816 000
01/8/29	61.05	61.3	59.54	60.25	24 085 000
01/8/28	62.34	62.95	60.58	60.74	23 711 400
01/8/27	61.9	63.36	61.57	62.31	22 281 400

（续）

日期	开盘数据	最高数据	最低数据	收盘数据	交易量
01/8/24	59.6	62.28	59.23	62.05	31 699 500
01/8/23	60.67	61.53	59.0	59.12	25 906 600
01/8/22	61.13	61.15	59.08	60.66	39 053 600
01/8/21	62.7	63.2	60.71	60.78	23 555 900
01/8/20	61.66	62.75	61.1	62.7	24 185 600
01/8/17	63.78	64.13	61.5	61.88	26 117 100
01/8/16	62.84	64.71	62.7	64.62	21 952 800
01/8/15	64.71	65.05	63.2	63.2	19 751 500
01/8/14	65.75	66.09	64.45	64.69	18 240 600
01/8/13	65.24	65.99	64.75	65.83	16 337 700

参考文献

[1] Cox, J., and M. Rubinstein(1985). *Options Markets*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[2] Garman, M., and M. J. Klass(1980). "On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data." *Journal of Business* 53: 67—78.

[3] Merton, R. C. (1976). "Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous." *Journal of Financial Economics* 3: 125—44.

[4] Rogers, L. C. G., and S. E. Satchell(1991). "Estimating Variance from High, Low, and Closing Prices." *Annals of Applied Probability* 1: 504—12.

162～164



第9章　期望效用估值法

9.1　套利定价的局限性

虽然套利是决定合理投资成本的有力工具，但用它通常不能唯一地确定投资成本. 事实上，从下面的例子可以看出，即便是对单期期权，如果它的标的证券在下一期有两个以上可能价格时，其无套利价格也不是唯一的.

例 9.1a　考虑 5.1 节看涨期权的例子. 设标的证券初始价格为 100，现假定在时刻 1，它的价格可能是 50，100，200. 也就是说允许出现这种可能：在时刻 1，股票价格相对于初始价格没有变化(见图 9-1). 和 5.1 节一样，我们现在希望求出执行价为 150，到期日为时刻 1 的看涨期权的价格.

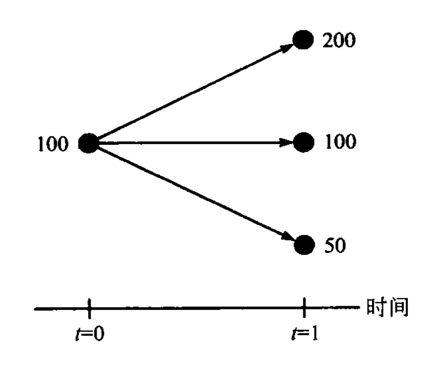


图 9-1　时刻 1 可能的股票价格

为简单起见，设利率 r 等于 0. 由套利定理知，如果存在非负实数 p_{50}，p_{100}，p_{200}满足：a)它们的和为 1；b) 时刻 1 股票价格是 i ($i=50$，100，200)的概率为 p_i 时，购买一股股票或一个期权的期望收益为零. 以 G_s 表示在时刻 1 购买一股股票的收益，$S(1)$为时刻 1 时股票的价格，那么有

$$G_s = \begin{cases} 100 & 若\ S(1) = 200, \\ 0 & 若\ S(1) = 100, \\ -50 & 若\ S(1) = 50. \end{cases}$$

因此

$$E[G_s] = 100p_{200} - 50p_{50}.$$

此外，如果 c 是期权价格，则购买一个期权所获的收益为

$$G_o = \begin{cases} 50 - c & 若\ S(1) = 200, \\ -c & 若\ S(1) = 100\ 或\ S(1) = 50. \end{cases}$$

所以

$$
\begin{aligned}
E[G_o] &= (50-c)p_{200} - c(p_{50}+p_{100}) \\
&= 50p_{200} - c.
\end{aligned}
$$

令 $E[G_s]$和 $E[G_o]$都等于 0，则无套利的条件是存在满足下列条件的概率和期权价格 c：

$$
p_{200} = \frac{1}{2}p_{50} \quad 和 \quad c = 50p_{200}.
$$

左边等式意味着 $p_{200}\leqslant 1/3$，由此知对任意 $c(0\leqslant c\leqslant 50/3)$，都存在概率使购买股票和购买期权均为公平赌博. 因此只要期权价格在区间[0，50/3]之间，无套利都是可能的. □

9.2 利用期望效用估计投资价值

假定必须从两种可能的投资中选择其一，每种投资都可能产生 n 种结果，记为 C_1，C_2，…，C_n. 若选择投资 1，则出现结果 C_i 的概率为 $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$；若选择投资 2，则相应概率为 $q_i(i=1, \cdots, n)$，其中 $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$. 下述方法可用于决定选择哪一种投资.

166

首先对投资结果进行赋值. 先确定最好和最坏结果，分别记为 C、c；赋值 $c=0$，$C=1$. 然后考虑另外 $n-2$ 个结果，设 C_i 为其中一个. 现在给出两种选择，一种是获得固定的收入 C_i；另一种是：以概率 u 获得 C，以概率 $1-u$ 获得 c. 显然，选择依赖于 u 的值. 若 $u=1$，则必然获得 C；既然 C 是最理想的结果，那么理所当然地选择第二种. 另一方面，如果 $u=0$，则第二种选择的结果肯定是最糟糕的 c，自然会选择第一种以获得固定收入 C_i. 现在，让 u 从 1 减少到 0，那么在 u 取某个值时，选择就会从第二种改为第一种. 此时这两种选择是无差别的. 将此时无差异概率的 u 值设定为结果 C_i 的值. 换句话说，C_i 的值就是概率 u 的值，这个值使得直接得到 C_i 和获得未定收益无差别. 称这个无差异概率为结果 C_i 的*效用*，记为 $u(C_i)$.

为决定选择哪种投资，必须估计每种投资的价值. 首先考虑投资 1，出现结果 C_i 的概率为 $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$. 将这一投资看成一个两步试验的结果：第一步，从 1，2，…，n 中随机选择一个数，设随机选中 1，2，…，n 的概率分别为 p_1，p_2，…，p_n；第二步如果选中 i，就可以获得 C_i. 由于 C_i 等价于以概率 $u(C_i)$获得 C 或以 $1-u(C_i)$的概率获得 c. 这样，两步试验的结果就等价于一个可能结果为 C 或 c 的试验. 在此试验中获得 C 的概率为

167

$$
\sum_{i=1}^{n} p_i u(C_i).
$$

类似地，投资 2 也等价于参加一个可能结果为 C 与 c 的试验，而在这个试验里获得 C 的概率为

$$\sum_{i=1}^{n} q_i u(C_i).$$

由于 C 优于 c，所以当

$$\sum_{i=1}^{n} p_i u(C_i) > \sum_{i=1}^{n} q_i u(C_i)$$

时，投资 1 优于投资 2. 换句话说，投资的价值可以用投资结果的效用期望值来衡量，具有最大期望效用的投资最优.

在许多投资中，投资的结果就是投资者获得了多少钱. 在此情形下，就可以用获得美元的数量作为投资结果，因此 $u(x)$就是投资者获得 x 美元的效用. 称 $u(x)$为**效用函数**. 如果一个投资者需要从两个投资策略中进行选择，其中投资 1 回报为 X 美元，投资 2 回报为 Y 美元，如果 $E[u(X)]>E[u(Y)]$，则选择投资 1. 反之，选择投资 2，这里 $u(x)$是该投资者的效用函数. 因为可能的投资回报经常构成一个无穷集合，所以去掉 $u(x)$在[0，1]之间取值的限制比较方便.

投资者的效用函数会因投资者的不同而异，但通常都假定 $u(x)$是 x 的非减函数. 另外，大多数投资者有这样共同(但非普遍)的特征：如果他们期望获得 x，则在 x 基础上再增收 Δ 所带来的效用增长量关于 x 非增. 也就是说，固定 $\Delta>0$，则效用函数满足： [168]

$$u(x+\Delta)-u(x)\text{关于 } x \text{ 非增.}$$

满足上述条件的效用函数称为**凹函数**. 这个性质可以用下式表示：

$$u''(x) \leqslant 0.$$

一个函数是凹的当且仅当其二阶导数是非正的. 图 9-2 给出了一个凹函数的曲线. 这种曲线具有这样的性质：曲线上任意两点的连线总是位于曲线在这两点间的部分的下方.

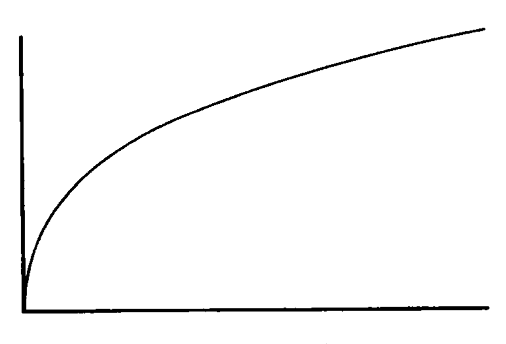


图 9-2 凹函数

如果一个投资者的效用函数是凹的，则称投资者是**风险厌恶的**. 这个概念是由**詹森不等式**得到的，该不等式指出，如果 u 是凹函数，则对任意随机变量 X，有

$$E[u(X)] \leqslant u[E(X)].$$

若设 X 为投资回报，由詹森不等式可知，具有凹效用函数的投资者更喜欢获得确定性收益 $E[X]$，而不愿接受具有这个期望值的随机回报.

169

下面给出詹森不等式及其证明.

詹森不等式 设 U 是一个凹函数，那么

$$E[U(X)] \leqslant U(E[X]).$$

证明：对 $U(x)$ 在 $\mu=E[X]$ 点使用泰勒公式，则存在介于 x 与 μ 之间的某个数 τ，使得

$$U(x) = U(\mu) + U'(\mu)(x-\mu) + U''(\tau)(x-\mu)^2/2.$$

因为 U 是凹函数，所以 $U'' \leqslant 0$，由上式有

$$U(x) \leqslant U(\mu) + U'(\mu)(x-\mu),$$

所以

$$U(X) \leqslant U(\mu) + U'(\mu)(X-\mu).$$

对上式两边取期望得

$$E[U(X)] \leqslant U(\mu) + U'(\mu)E[X-\mu] = U(\mu).$$ □

如果一个投资者具有线性效用函数

$$u(x) = a + bx, \quad b > 0,$$

则称其为*风险中性者*或*风险无差异者*. 因为这种效用函数满足

$$E[u(X)] = a + bE[X],$$

所以风险中性投资者仅仅通过期望回报来估计他们投资的价值.

一个常用的效用函数是*对数效用函数*：

$$u(x) = \log(x);$$

见图 9-3. 由于 $\log(x)$ 是凹函数，所以具有对数效用函数的投资者是风险厌恶者. 这是一个重要的效用函数，因为在数学上可以证明，在许多情况下，如果用对数效用函数模型，当投资者面临一个无穷投资序列时，可以采用对数效用函数通过最大化每一期的期望效用来使其长期回报率最大化.

170

为了便于理解其中的原因，设每一期的投资结果将投资者的财富放大一个随机倍数 X. 记 W_n 为 n 次投资后投资者的财富，X_n 为第 n 次投资的增长倍数，则

$$W_n = X_n W_{n-1}, \quad n \geqslant 1.$$

W_0 为投资者的初始财富，由上式可得：

$$\begin{aligned} W_n &= X_n W_{n-1} \\ &= X_n X_{n-1} W_{n-2} \\ &= X_n X_{n-1} X_{n-2} W_{n-3} \end{aligned}$$

$$\vdots$$
$$= X_n X_{n-1} \cdots X_1 W_0.$$

将 n 次投资的平均回报率记为 R_n，则有

$$\frac{W_n}{(1+R_n)^n} = W_0$$

或

$$(1+R_n)^n = \frac{W_n}{W_0} = X_1 \cdots X_n.$$

两边取对数，得

$$\log(1+R_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \log(X_i)}{n}.$$

若 X_i 独立同分布，则由强大数定律，$\log(X_i)(i=1, 2, \cdots, n)$的平均值随 n 的增大逐渐趋近于 $E[\log(X_i)]$. 所以，

$$\log(1+R_n) \to E[\log(X)], \quad 当 n \to \infty 时.$$

因此，如果一个人选择了某种投资方式，即确定了因子 X_i 的概率，那么可以通过选择使 $E[\log(X)]$最大的投资从而达到最大的长期投资回报率.

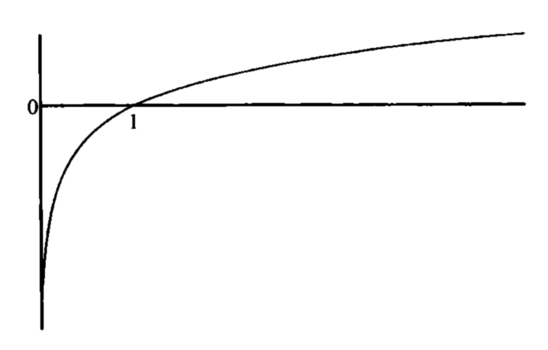


图 9-3 对数效用函数

进一步，由 $W_n = W_0 X_1 \cdots X_n$ 有

$$\log(W_n) = \log(W_0) + \sum_{i=1}^{n} \log(X_i).$$

所以

$$E[\log(W_n)] = \log(W_0) + nE[\log(X)],$$

这就说明 $E[\log(X)]$的最大化等价于最后财富的对数的期望的最大化.

下面的例子表明，一个具有对数效用函数的投资者在其喜爱的赌博中应该投入多少钱.

例 9.2a 一个投资者有本金 x，可以投资的钱数在 0 到 x 之间，如果投资了

y，则会以概率 p 获益 y，以 $1-p$ 损失 y. 如果 $p>1/2$，投资者的效用函数是对数的，则投资者应该投入多少?

171~172

解：设投入金额是 αx，$0\leqslant\alpha\leqslant1$，投资者的投资结果记为 X，它等于 $x+\alpha x$ 或 $x-\alpha x$，出现这两种结果的概率分别为 p，$1-p$，它的期望效用为

$$\begin{aligned}&p\log((1+\alpha)x)+(1-p)\log((1-\alpha)x)\\&=p\log(1+\alpha)+p\log(x)+(1-p)\log(1-\alpha)+(1-p)\log(x)\\&=\log(x)+p\log(1+\alpha)+(1-p)\log(1-\alpha).\end{aligned}$$

为求出 α 的最优值，对上式关于 α 求导

$$p\log(1+\alpha)+(1-p)\log(1-\alpha)$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(p\log(1+\alpha)+(1-p)\log(1-\alpha))=\frac{p}{1+\alpha}-\frac{1-p}{1-\alpha}.$$

令上式等于 0，得

$$p-\alpha p=1-p+\alpha-\alpha p\quad\text{或}\quad\alpha=2p-1.$$

所以投资者每次都应投资他现有财富的 $100(2p-1)\%$. 例如，如果获利的概率 $p=0.6$，则投资者应该投资全部财富的 20%. 如果 $p=0.7$，他应该投资 40%.（当 $P\leqslant1/2$ 时，容易证明最优投资数量为 0.） □

下面在上述例子的基础上加入时间因素.

例 9.2b 在例 9.2a 中，假定投资 αx 后，如果获利，则收益 $2\alpha x$ 在一个单位时间之后才会支付，并假设未投资的部分可以存入银行，每期利率为 r. 求此情况下，应投资多少?

173

解：设投资者投资 αx，将剩余的 $(1-\alpha)x$ 存到银行，那么一期后，存款变为 $(1+r)(1-\alpha)x$，而投资部分变为 $2\alpha x$（概率为 p）或 0（概率为 $1-p$）. 他财富的期望效用为：

$$\begin{aligned}&p\log((1+r)(1-\alpha)x+2\alpha x)+(1-p)\log((1+r)(1-\alpha)x)\\&=\log(x)+p\log(1+r+\alpha-\alpha r)\\&+(1-p)\log(1+r)+(1-p)\log(1-\alpha).\end{aligned}$$

因此，一个人财富的最优投资比例不会因财富的多少而改变. 现对上式关于 α 求导有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(\text{期望效用})=\frac{p(1-r)}{1+r+\alpha-\alpha r}-\frac{1-p}{1-\alpha}.$$

令此导数值等于 0，解方程可得 α 的最优值：

$$\alpha=\frac{p(1-r)-(1-p)(1+r)}{1-r}=\frac{2p-1-r}{1-r}.$$

例如，当 $p=0.6$，$r=0.05$ 时，投资的期望回报率是 20%（而全部资本存入银行

只能收益 5%)，此时最优投资比例为

$$\alpha = \frac{0.15}{0.95} \approx 0.158.$$

也就是说，投资者应该将财富的 15.8%进行投资，而将剩余的部分存入银行. □

另外一个常用的效用函数称为**指数效用函数**：

$$u(x) = 1 - \mathrm{e}^{-bx}, \quad b > 0.$$

指数效用函数也是风险厌恶效用函数(见图 9-4).

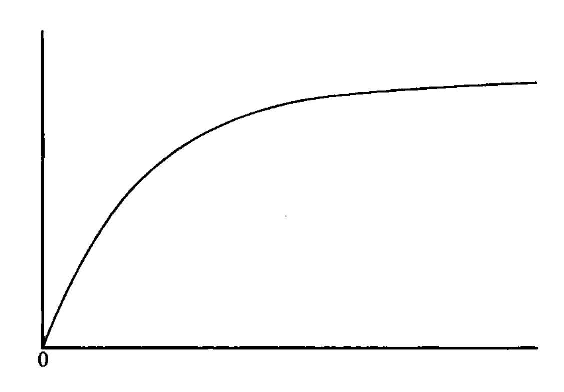


图 9-4 指数效用函数

9.3 投资组合的选择问题

设一投资者欲将 $w(w>0)$的资本投资到 n 种不同的证券. 如果投资到证券 i 的数量为 a ($i=1$, …, n)，一个时期后，投资回报为 aX_i，X_i 是非负随机变量. 换句话说，设 R_i 为证券 i 的投资回报率，则

$$a = \frac{aX_i}{1+R_i} \quad \text{或} \quad R_i = X_i - 1.$$

如果 w_i 是投入证券 i 的金额($i=1$, …, n)，则一期末的财富为

$$W = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i.$$

向量$(w_1, \cdots, w_n)$称为**一个投资组合**. 确定一个投资组合，使投资者在期末的期望效用最大化的问题可以从数学上表示为：

$$\text{选择}(w_1, \cdots, w_n)\text{，满足：}$$

$$w_i \geqslant 0, \quad i = 1, \cdots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = w,$$

$$\text{使 } E[U(W)] \text{ 最大}$$

174~175

其中 U 是投资者期末财富的效用函数.

为了使该问题更容易处理，设期末财富 W 为一个正态随机变量. 实际上只要投资者投资的众多证券间不是高度相关的，则由中心极限定理，这种假设是一个合理的近似.（如果 X_i，$i=1$，…，n 服从多元正态分布，则这种假设就是真的.）

现在假设投资者的效用函数是指数函数：

$$U(x) = 1 - \mathrm{e}^{-bx}, \quad b > 0,$$

则效用函数是凹的. 若 Z 是一正态随机变量，则 e^Z 是对数正态的，期望值为

$$E[\mathrm{e}^Z] = \exp\{E[Z] + \mathrm{Var}(Z)/2\}.$$

又 $-bW$ 是均值为 $-bE[W]$，方差为 $b^2\mathrm{Var}(W)$ 的正态随机变量，故

$$E[U(W)] = 1 - E[\mathrm{e}^{-bW}] = 1 - \exp\{-bE[W] + b^2\mathrm{Var}(W)/2\}.$$

因此若选择满足下面条件的投资组合，则投资者的期望效用会达到最大：

$$\max\{E[W] - b\mathrm{Var}(W)/2\}.$$

注意这实际上意味着：如果两个组合分别产生随机期末财富 W_1，W_2，且 W_1 比 W_2 有较大的均值和较小的方差，则组合1比组合2的期望效用更大，即

$$\begin{aligned} &E[W_1] \geqslant E[W_2] \ \& \ \mathrm{Var}(W_1) \leqslant \mathrm{Var}(W_2) \\ &\Rightarrow E[U(W_1)] \geqslant E[U(W_2)]. \end{aligned} \tag{9-1}$$

事实上，如果所有期末财富均为正态随机变量，那么即使效用函数不是指数的，只要它是非减的凹函数，式(9-1)仍然成立. 所以，对于一个风险厌恶投资者来说，如果投资1的期望收益不小于投资2的期望收益，方差不大于投资2的方差，那么就选择投资1.

现在计算给定组合下，W 的均值和方差. 其中证券 i 的回报率为 $R_i = X_i - 1$，令

176

$$r_i = E[R_i], \quad v_i^2 = \mathrm{Var}(R_i).$$

由于

$$W = \sum_{i=1}^{n} w_i(1 + R_i) = w + \sum_{i=1}^{n} w_i R_i,$$

所以有

$$\begin{aligned} E[W] &= w + \sum_{i=1}^{n} E[w_i R_i] \\ &= w + \sum_{i=1}^{n} w_i r_i; \end{aligned} \tag{9-2}$$

$$\mathrm{Var}(W) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(w_i R_i)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \mathrm{Cov}(w_i R_i, w_j R_j) \quad （由等式 (1\text{-}11)）$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i^2 v_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} w_i w_j c(i,j), \tag{9-3}$$

其中

$$c(i,j) = \mathrm{Cov}(R_i, R_j).$$

例 9.3a W 具有正态分布的一个重要情形是：R_1，R_2，…，R_n 服从多元正态分布.

下面给出多元正态分布的定义.

定义 设 Z_1，Z_2，…，Z_m 是相互独立的标准正态随机变量，$\mu_i(i=1, 2, \cdots, n)$和 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, m)$是一些常数，记

$$X_1 = \mu_1 + a_{11}Z_1 + a_{12}Z_2 + \cdots + a_{1m}Z_m,$$
$$X_2 = \mu_2 + a_{21}Z_1 + a_{22}Z_2 + \cdots + a_{2m}Z_m,$$
$$\vdots$$
$$X_i = \mu_i + a_{i1}Z_1 + a_{i2}Z_2 + \cdots + a_{im}Z_m,$$
$$\vdots$$
$$X_n = \mu_n + a_{n1}Z_1 + a_{n2}Z_2 + \cdots + a_{nm}Z_m,$$

则称$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$服从多元正态分布. [177]

由于线性组合 $\sum_{i=1}^{n} w_i X_i$ 也是独立正态随机变量 Z_1，Z_2，…，Z_m 的一个线性组合，因此 $\sum_{i=1}^{n} w_i X_i$ 也是一个正态随机变量. □

例 9.3b 考虑将 100 的资本投资到两种证券，它们回报率的均值和标准差分别为

$$r_1 = 0.15, \quad v_1 = 0.20; \quad r_2 = 0.18, \quad v_2 = 0.25.$$

若两个回报率的相关系数 $\rho = -0.4$，投资者的效用函数为

$$U(x) = 1 - e^{-0.005x}.$$

求这两个证券的最优组合.

解：设 $w_1 = y$，$w_2 = 100 - y$，由式(9-2)得

$$E[W] = 100 + 0.15y + 0.18(100 - y) = 118 - 0.03y.$$

又由于 $c(1, 2) = \rho v_1 v_2 = -0.02$，由式(9-3)得

$$\mathrm{Var}(W) = y^2(0.04) + (100 - y)^2(0.0625) - 2y(100 - y)(0.02)$$

$$=0.1425y^2-16.5y+625.$$

所以应该选择 y，使下式的值达到最大：

$$118-0.03y-0.005(0.1425y^2-16.5y+625)/2$$

或等价地，最大化

$$0.01125y-0.0007125y^2/2.$$

简单计算后得知 y 取下值时，上式达到最大：

$$y=\frac{0.01125}{0.0007125}=15.789.$$

即当投资 15.789 于证券 1，投资 84.211 于证券 2 时，期末财富的期望效用达到最大. 将 $y=15.789$ 代入前面等式，得 $E[W]=117.526$，$\mathrm{Var}(W)=400.006$，最大期望效用等于：

178

$$1-\exp\{-0.005(117.526+0.005(400.006)/2)\}=0.4416.$$

这可以和下述投资组合的效用比较一下：将 100 全部投资到证券 1 时，期望效用为 0.390 4；当 100 全部投资到证券 2 时，期望效用为 0.441 3. □

例 9.3c 考虑两个证券，二者具有相同的期望收益率. 在此情况下，所有的投资组合都产生相同的投资回报率，因此对于凹的效用函数来说，最佳组合应该使期末财富具有最小方差. 如果将 αw 投资于证券 1，$(1-\alpha)w$ 投资于证券 2，$c=c(1,2)$，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(W)&=\alpha^2w^2v_1^2+(1-\alpha)^2w^2v_2^2+2\alpha(1-\alpha)w^2c\\&=w^2[\alpha^2v_1^2+(1-\alpha)^2v_2^2+2c\alpha(1-\alpha)].\end{aligned}$$

这样，当 α 的取值使 $\alpha^2v_1^2+(1-\alpha)^2v_2^2+2c\alpha(1-\alpha)$ 最小时可以获得最优组合. 对上式关于 α 求导，并令导数等于 0，得

$$2\alpha v_1^2-2(1-\alpha)v_2^2+2c-4c\alpha=0.$$

解上述方程，得到证券 1 在最优投资中的比例为

$$\alpha=\frac{v_2^2-c}{v_1^2+v_2^2-2c}.$$

例如，设回报率的标准差 $v_1=0.20$，$v_2=0.30$，两个证券回报率的相关系数 $\rho=0.30$，那么 $c=\rho v_1v_2=0.018$，于是得到最优组合中投资到证券 1 的比例为

$$\alpha=\frac{0.09-0.018}{0.04+0.09-0.036}=72/94\approx0.766.$$

179

即将资本的 76.6%购买证券 1，23.4%购买证券 2.

如果两个证券的回报是独立的，那么 $c=0$，此时投入证券 1 的最优比例为：

$$\alpha=\frac{v_2^2}{v_1^2+v_2^2}=\frac{1/v_1^2}{1/v_1^2+1/v_2^2}.$$

在此情形下，投资于一个证券的最优资本比例由这样一个加权平均决定，其中的权重与证券回报率方差成反比．这一结果对 n 个证券仍然是正确的，只要这些证券的回报率互不相关且期望相等．这样的话，投资于证券 i 的最优资本比例是：

$$\frac{1/v_i^2}{\sum_{j=1}^{n} 1/v_j^2}. \qquad \square$$

寻找一个组合使投资者期末财富期望效用最大化，一般要进行大量的计算．但若效用函数 $U(x)$ 的二阶导数是一个非减函数，即

$$U''(x) \text{ 关于 } x \text{ 非减}, \tag{9-4}$$

那么常常可以找到一个合理的近似算法．

容易验证下列效用函数均满足条件(9-4)：

$$U(x) = x^a, \quad 0 < a < 1,$$
$$U(x) = 1 - e^{-bx}, \quad b > 0,$$
$$U(x) = \log(x).$$

设 $U(x)$ 满足条件(9-4)，用点 $\mu = E[W]$ 处的泰勒级数展开的前三项来估计 $U(W)$：

$$U(W) \approx U(\mu) + U'(\mu)(W-\mu) + U''(\mu)(W-\mu)^2/2.$$

两边取期望得

$$\begin{aligned} E[U(W)] &\approx U(\mu) + U'(\mu)E[W-\mu] + U''(\mu)E[(W-\mu)^2]/2 \\ &= U(\mu) + U''(\mu)v^2/2, \end{aligned}$$

180

其中 $v^2 = \mathrm{Var}(W)$，又因为

$$E[W-\mu] = E[W] - \mu = \mu - \mu = 0.$$

所以最优组合的一个合理近似可由使下式

$$U(E[W]) + U''(E[W])\mathrm{Var}(W)/2 \tag{9-5}$$

最大化的组合得到．

如果 U 是非减的凹函数且满足条件(9-4)，则表达式(9-5)同时具有所希望的两个性质：关于 $E[W]$ 递增，关于 $\mathrm{Var}(W)$ 递减．

具有形式 $U(x) = x^a$ 或 $U(x) = \log(x)$ 的效用函数具有下面的性质：存在向量

$$\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*, \quad \alpha_i^* \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* = 1,$$

使得对于任意初始财富 w，从这些效用函数中选出一个，在这个效用函数下的最优组合为 $w\alpha_1^*$，…，$w\alpha_n^*$．对于这些效用函数，投资者的财富投入到证券 i 的最优比例不依赖于 w．为了证明这一点，注意到对任意组合 $w\alpha_1$，…，$w\alpha_n$：

$$W = w\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i$$

而且，如果 $U(x)=x^a$，则

$$\begin{aligned}E[U(W)] &= E[W^a] \\ &= E\left[w^a\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i\right)^a\right] \\ &= w^a E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i\right)^a\right].\end{aligned}$$

所以最优的 $\alpha_i(i=1, 2, \cdots, n)$不依赖于 w. (对于 $U(x)=\log(x)$的讨论留作练习，请读者自己证明.)

近似计算准则(9-5)的一个重要的特征是，当 $U(x)=x^a(0<a<1)$时，最大 181 化表达式(9-5)的投资组合也具有这种性质：投资到每个证券的财富比例不依赖于 w. 由式(9-2)、式(9-3)看到，对于组合 $w_i=\alpha_i w(i=1, 2, \cdots, n)$，

$$E[W] = wA, \quad \mathrm{Var}(W) = w^2 B,$$

其中

$$A = 1 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i r_i,$$

$$B = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 v_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\alpha_i\alpha_j c(i,j).$$

这样，由于

$$U''(x) = a(a-1)x^{a-2},$$

所以

$$\begin{aligned}&U(E[W]) + U''(E[W])\mathrm{Var}(W)/2 \\ &= w^a A^a + a(a-1)w^{a-2}A^{a-2}w^2 B/2 \\ &= w^a[A^a + a(a-1)A^{a-2}B/2].\end{aligned}$$

故当表达式(9-5)的值达到最大时投资比例不依赖于 w.

例 9.3d 再次考虑例 9.3a，但将效用函数改为：

$$U(x) = \sqrt{x}.$$

令 $\alpha_1=\alpha$，$\alpha_2=1-\alpha$，则有

$$A = 1 + 0.15\alpha + 0.18(1-\alpha),$$
$$B = 0.04\alpha^2 + 0.0625(1-\alpha)^2 - 2(0.02)\alpha(1-\alpha).$$

现要求出 α 的值，使下式的值达到最大：

$$f(\alpha) = A^{1/2} - A^{-3/2}B/8.$$

令上式的导数等于 0，使用数值方法解相应方程便可得到所要的结果. □ 182

现假定可以进行正的或负的投资，且投资所需资金均通过借款获得，借款利率每期固定为 r. 设 w_i 是对投资 i 的投入($i=1$，…，n)，则一期后此投资组合的收益为：

$$R(\boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^{n} w_i(1+R_i) - (1+r)\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} w_i(R_i - r).$$

(如果 $s = \sum_i w_i$ ，则 $s>0$ 表示从银行借入，$s<0$ 表示存入银行 $-s$.)令

$$r(\boldsymbol{w}) = E[R(\boldsymbol{w})], \quad V(\boldsymbol{w}) = \mathrm{Var}(R(\boldsymbol{w})).$$

注意到

$$r(a\boldsymbol{w}) = ar(\boldsymbol{w}), \quad V(a\boldsymbol{w}) = a^2V(\boldsymbol{w}),$$

其中 $a\boldsymbol{w}=(aw_1, \cdots, aw_n)$. 设 $\boldsymbol{w}^*$ 满足 $r(\boldsymbol{w}^*)=1$，且

$$V(\boldsymbol{w}^*) = \min_{\boldsymbol{w}: r(\boldsymbol{w})=1} V(\boldsymbol{w}).$$

即在所有期望回报为 1 的投资组合 $\boldsymbol{w}$ 中，组合回报的方差在 $\boldsymbol{w}^*$ 达到最小.

现在证明：对任意 $b>0$，在所有期望回报为 b 的组合中，$b\boldsymbol{w}^*$ 使投资回报方差最小.

为证明这一点，设 $r(\boldsymbol{y})=b$，则

$$r\left(\frac{1}{b}\boldsymbol{y}\right) = \frac{1}{b}r(\boldsymbol{y}) = 1,$$

这意味着(由 $\boldsymbol{w}^*$ 的定义)

$$V(b\boldsymbol{w}^*) = b^2V(\boldsymbol{w}^*) \leqslant b^2V\left(\frac{1}{b}\boldsymbol{y}\right) = V(\boldsymbol{y}),$$

这样就证明了上面的结论. 因此，使回报方差最小的组合等于一个特定组合的常数倍. 这一性质称为投资组合*分离定理*. 因为当从均方差观点来分析投资组合最优化问题时，此定理使我们将投资组合最优化问题分成下面两个问题：确定每种投资的投资比例和选择上述的倍数. 183

协方差估计

为了构造一个好的投资组合，首先用历史数据估计对所有 i，j，$r_i=E[R_i]$，$v_i^2=\mathrm{Var}(R_i)$，$c(i, j)=\mathrm{Cov}(R_i, R_j)$等的值. 均值 r_i 和方差 v_i^2 的值可以利用 8.5 节的方法，即用证券 i 历史回报率的样本均值和样本方差估计分别估计它们. 为了估计协方差 $c(i, j)$(固定的 i，j)，设已知 m 期的历史数据，$r_{i,k}$，$r_{j,k}$分别表示证券 i 和证券 j 在第 k 期的回报率，$k=1$，…，m. 那么

$$\mathrm{Cov}(R_i, R_j) = E[(R_i - r_i)(R_j - r_j)]$$

的常用估计量是

$$\frac{\sum_{k=1}^{m}(r_{i,k}-\bar{r}_i)(r_{j,k}-\bar{r}_j)}{m-1},$$

其中 $\bar{r}_i$，$\bar{r}_j$ 是样本均值

$$\bar{r}_i=\frac{\sum_{k=1}^{m}r_{i,k}}{m},\quad \bar{r}_j=\frac{\sum_{k=1}^{m}r_{j,k}}{m}.$$

9.4 风险价值和条件风险价值

设 G 表示一项投资收益的现值$\left(\text{如果该投资要求的初始投入为 } c\text{，一期后的回报为 } X\text{，则 } G=\frac{X}{1+r}-c\right)$. 一项投资的风险值(value at risk，VAR)是这样一个数值 v，它表示仅有1%的机会使得投资损失大于 v. 由于 $-G$ 为投资损失，因此风险值 v 是满足下式的实数：

$$P\{-G>v\}=0.01.$$

从不同类型的投资中选择具有最小 VAR 的投资，亦称 VAR 准则，这种方法近年来比较盛行.

184

例 9.4a 设投资收益 G 是均值为 μ，标准差为 σ 的正态随机变量，故 $-G$ 是均值为 $-\mu$，标准差为 σ 的正态随机变量，所以此投资的 VAR 值为

$$\begin{aligned}0.01&=P\{-G>v\}\\&=P\left\{\frac{-G+\mu}{\sigma}>\frac{v+\mu}{\sigma}\right\}\\&=P\left\{Z>\frac{v+\mu}{\sigma}\right\},\end{aligned}$$

其中 Z 是标准正态随机变量. 从表 2-1 可以得到 $P\{Z>2.33\}=0.01$. 因此，

$$2.33=\frac{v+\mu}{\sigma}$$

或

$$\text{VAR}=-\mu+2.33\sigma.$$

所以，在收益服从正态分布的投资中，VAR 准则将选择使 $\mu-2.33\sigma$ 的值最大的投资. □

注 用来定义 VAR 的临界值 0.01 用得较多，原因是它设定了一个不太可能超出的损失上界. 但也有的投资者在运用 VAR 准则时使用其他的

临界值.

VAR 给出了这样一个值，只有 1%的机会使投资损失大于这个值. 然而，代替选择具有最小 VAR 的投资，有人认为考虑在已知损失大于 VAR 值情况下的条件期望损失更好. 换句话说，如果概率为 1%的事件发生了，出现了大的损失，则损失量是大于 VAR 的一个值. 已知损失超过 VAR 值情况下的期望损失称为条件风险值(conditional value at risk, CVAR). CVAR 准则就是选择 CVAR 值最小的投资. 185

例 9.4b 设一项投资的收益 G 是均值为 μ，标准差为 σ 的正态随机变量，那么 CVAR 值为：

$$\begin{aligned}
\text{CVAR} &= E[-G \mid -G > \text{VAR}] \\
&= E[-G \mid -G > -\mu + 2.33\sigma] \\
&= E\left[-G \mid \frac{-G+\mu}{\sigma} > 2.33\right] \\
&= E\left[\sigma\left(\frac{-G+\mu}{\sigma}\right) - \mu \mid \frac{-G+\mu}{\sigma} > 2.33\right] \\
&= \sigma E\left[\frac{-G+\mu}{\sigma} \mid \frac{-G+\mu}{\sigma} > 2.33\right] - \mu \\
&= \sigma E[Z \mid Z > 2.33] - \mu,
\end{aligned}$$

其中 Z 是标准正态的. 容易证明，对于标准正态随机变量 Z，

$$E[Z \mid Z > a] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}P\{Z \geqslant a\}} \mathrm{e}^{-a^2/2}. \tag{9-6}$$

故

$$\text{CVAR} = \sigma \frac{100}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-(2.33)^2/2\} - \mu = 2.64\sigma - \mu.$$

因此，CVAR 准则要求 $\mu - 2.64\sigma$ 最大化，它比 VAR 准则给了方差稍大一些的权重. □ 186

为了验证式(9-6)，由 $Z>a$ 下 Z 的条件密度为

$$f_{Z|Z>a}(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathrm{e}^{x^2/2}}{\mathrm{P}\sqrt{Z > a}}, \quad x > a.$$

给出

$$\begin{aligned}
E[Z|Z > a] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}P(Z > a)} \int_a^\infty x \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}P(Z > a)} \mathrm{e}^{-a^2/2}.
\end{aligned}$$

9.5 资本资产定价模型

资本资产定价模型(Capital Assets Pricing Model，CAPM)试图建立给定证券 i 的单期回报率 R_i 与市场单期回报率 R_m(可以用像标准普尔500股票指数这样的指标度量)的关系. 设 r_f 为无风险利率(通常取美国短期国债的当前利率)，该模型指出，对于某常数 β_i，有

$$R_i = r_f + \beta_i(R_m - r_f) + e_i,$$

其中 e_i 是均值为0的正态随机变量，它独立于 R_m. 设 R_i 和 R_m 的期望值分别为 r_i 和 r_m. 在CAPM模型(设 r_f 为常数)中它们有下面的关系：

$$r_i = r_f + \beta_i(r_m - r_f),$$

或等价地，

$$r_i - r_f = \beta_i(r_m - r_f).$$

即证券 i 的期望回报率与无风险利率间的差值等于 β_i 乘以市场期望回报率与无风险利率间的差值. 如果 $\beta_i=1$(或1/2或2)，则证券 i 的回报率超过 r_f 部分的期望值等于(或一半于或2倍于)市场回报率高于 r_f 的那部分期望值. β_i 称为证券 i 的 β 值.

利用协方差的线性性质以及任意随机变量与常数的协方差均为0的性质，可以得到在CAPM下：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(R_i,R_m) &= \beta_i\mathrm{Cov}(R_m,R_m) + \mathrm{Cov}(e_i,R_m) \\ &= \beta_i\mathrm{Var}(R_m) \quad (\text{由于 } e_i \text{ 和 } R_m \text{ 是无关的}).\end{aligned}$$

因此，令 $v_m^2=\mathrm{Var}(R_m)$得

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(R_i,R_m)}{v_m^2}.$$

187

例 9.5a 设当前无风险利率为6%，市场回报率的均值和标准差分别为0.10，0.20. 如果给定股票的回报率与市场回报率的协方差为0.05，求该股票回报率的期望值.

解： 由于

$$\beta = \frac{0.05}{(0.20)^2} = 1.25,$$

所以(假定CAPM模型有效)

$$r_i = 0.06 + 1.25(0.10 - 0.06) = 0.11.$$

即股票的期望回报率为11%. □

令 $v_i^2=\mathrm{Var}(R_i)$，利用 e_i 和 R_m 的独立性，在CAPM下有

$$v_i^2 = \beta_i^2 v_m^2 + \mathrm{Var}(e_i).$$

如果用证券回报率的方差代表该证券的风险，则上述等式说明证券的风险包

括两项：第一项 $\beta_i^2 v_m^2$，称为系统风险，它是由证券的 β 值和市场潜在风险结合产生的；第二项 $\mathrm{Var}(e_i)$，称为个体风险，它来自所考虑的股票本身.

9.6 回报率：单期几何布朗运动

设 $S_i(t)$为证券 i 在 $t(t\geqslant 0)$时刻的价格，并设此价格过程是漂移参数为 μ_i，波动参数为 σ_i 的几何布朗运动. R_i 是证券 i 的单期回报率，则

$$\frac{S_i(1)}{1+R_i} = S_i(0),$$

或等价地，

$$R_i = \frac{S_i(1)}{S_i(0)} - 1.$$

188

由于 $S_i(1)/S_i(0)$和 e^X 具有相同的概率分布，其中 X 是均值为 μ_i，方差是 σ_i^2 的正态随机变量，所以有

$$\begin{aligned} r_i = E[R_i] &= E\left[\frac{S_i(1)}{S_i(0)}\right] - 1 \\ &= E[\mathrm{e}^X] - 1 \\ &= \exp\{\mu_i + \sigma_i^2/2\} - 1. \end{aligned}$$

而且，

$$\begin{aligned} v_i^2 = \mathrm{Var}(R_i) &= \mathrm{Var}\left(\frac{S_i(1)}{S_i(0)}\right) \\ &= \mathrm{Var}(\mathrm{e}^X) \\ &= E[\mathrm{e}^{2X}] - (E[\mathrm{e}^X])^2 \\ &= \exp\{2\mu_i + 2\sigma_i^2\} - (\exp\{\mu_i + \sigma_i^2/2\})^2 \\ &= \exp\{2\mu_i + 2\sigma_i^2\} - \exp\{2\mu_i + \sigma_i^2\}, \end{aligned}$$

这里为确定 $E[\mathrm{e}^{2X}]$，上式中倒数第二个等式用到 $2X$ 是均值为 $2\mu_i$，方差是 $4\sigma_i^2$ 的正态随机变量.

于是证券 i 的单期期望回报率是 $\exp\{\mu_i+\sigma_i^2/2\}-1$；注意它与时刻 1 的平均即期收益率的期望值是不相等的. 因为如果用 $\bar{R}_i(t)$表示 t 时刻即期回报率的平均值(即收益曲线)，那么

$$\frac{S_i(t)}{S_i(0)} = \mathrm{e}^{t\bar{R}_i(t)},$$

这意味着

$$\bar{R}_i(t) = \frac{1}{t}\log\left(\frac{S_i(t)}{S_i(0)}\right).$$

由于 $\log(S_i(t)/S_i(0))$是均值为 $\mu_i t$，方差是 $\sigma_i^2 t$ 的正态随机变量，所以 $\bar{R}_i(t)$也是

正态随机变量，其均值和方差如下：

$$E[\bar{R}_i(t)] = \mu_i, \quad \mathrm{Var}(\bar{R}_i(t)) = \sigma_i^2/t.$$

因此，几何布朗运动的单期收益函数的期望值和方差也是几何布朗运动本身的参数 μ_i 和 σ_i^2.

189

9.7 习题

练习 9.1 一个投资者的效用函数为 $u(x)=1-e^{-x}$. 该投资者有两种投资方式可供选择：一种是每投资 1，其未来财富是一个密度函数为 $f_1(x)=e^{-x}(x>0)$ 的随机变量；另一种是每投资 2，其未来财富是一个密度函数为 $f_2(x)=1/2(0<x<2)$ 的随机变量. 该投资者应选择哪一种投资方式?

练习 9.2 设个人投资总额为 a，则来自该投资的收益为 aX，其中

$$P(X=-1)=0.4 \quad ,P(X=0.2)=0.5, \quad P(X=2.5)=0.1.$$

对风险厌恶者来说，a 的最优值是多少?

练习 9.3 对例 9.2a 证明：若 $p\leqslant 1/2$，则最优投资额为 0.

练习 9.4 在例 9.2b 中，证明：若 $p\leqslant 1/2$，则最优投资额为 0.

练习 9.5 在例 9.3a 中，令 $\rho=0$，求最优投资组合.

练习 9.6 在例 9.3a 中，令 $r_1=0.16$. 确定最大期望效用，并与下面两种情况进行比较：

a)将所有资本投入到证券 1 的期望效用；

b)将所有资本投入到证券 2 的期望效用.

练习 9.7 证明最大化 $E[\log(W)]$时，需要投资到各证券的财富比例不依赖于初始财富的数量.

练习 9.8 证明 $U''(x)$关于 x 非减，如果 $x>0$ 且

a)$U(x)=x^a(0<a<1)$；

b)$U(x)=1-e^{-bx}$，$b>0$；

c)$U(x)=\log(x)$.

190

练习 9.9 如果 $U(x)=\log(x)$，最大化近似式(9-5)时投资到每个证券的财富比例依赖于初始财富的数量吗?

练习 9.10 利用式(9-5)给出的关于 $E[U(W)]$的近似，确定例 9.3a 中投资到每个证券的最优数量，其中效用函数为 $U(x)=1-e^{-0.005x}$，并与该例中获得的结果进行比较.

练习 9.11 选择一个投资组合，以使单期期末的财富值 W 不小于 g 这一事件的概率达到最大，其中 $g>w$，w 为初始财富. 设 W 是正态的，那么最优投资组合将极大化 $E[W]$和 $\mathrm{Var}(W)$的什么函数?

练习 9.12 求例 9.3a 中的最优组合，假设你的目标是，在正态假设下使期末财富不少于下列各值的概率达到最大：

a) 110；　b)115；　c)120；　d)125 .

练习 9.13 求例 9.3c 的解.

练习 9.14 如果一股股票的 β 值等于 0.80，市场回报率的期望值为 0.07，无风险利率为 5%，求这股股票的期望收益率. 如果将无风险利率改为 10%，股票的期望收益率又是多少？假设 CAPM 模型有效.

练习 9.15 设股票 $i(i=1,\cdots,k)$的 β 值为β_i，若一个投资组合中购买股票 i 的资本比例是$\alpha_i(i=1,\cdots,k)$，求该组合的 β 值.

练习 9.16 一个单因素模型是：证券的单期回报率 R_i 具有下面的表达式：

$$R_i=a_i+b_iF+e_i,$$

其中 F 是随机变量(称为因素)，e_i 是均值为 0 的正态随机变量，独立于 F，a_i，b_i 是常数，它们依赖于该证券. 证明 CAPM 是单因素模型，并求 a_i，b_i，F. 191

练习 9.17 设 X_1，X_2 是均值为 1，方差也为 1 的独立随机变量. 投资者 A 有严格凹的效用函数.

a)能否得出投资者 A 选择最终财富为 2 或 X_1+X_2 的判断？

b)能否得出投资者 A 选择最终财富为 $2X_1$ 或 X_1+X_2 的判断？

c)能否得出投资者 A 选择最终财富为 $3X_1$ 或 X_1+X_2 的判断？

d)如果投资者 A 的效用函数为 $u(x)=1-e^{-x}$，c)应选择哪一种最终财富方式？

练习 9.18 设 X_1，X_2，…，X_m 服从参数为例 9.3a 所给的多元正态分布，求证

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=\sum_{r=1}^{n}a_{ir}a_{jr}.$$

参考文献

文献[2]、[3]、[5]是有关效用理论的 .

[1] Breiman, L. (1960). "Investment Policies for Expanding Businesses Optimal in a Long Run Sense." *Naval Research Logistics Quarterly* 7: 647—51.

[2] Ingersoll, J. E. (1987). *Theory of Financial Decision Making*. Lanham, MD: Rowman & Littlefield.

[3] Pratt, J. (1964). "Risk Aversion in the Small and in the Large." *Econometrica* 32: 122—30.

[4] Thorp, E. O. (1975), "Portfolio Choice and the Kelly Criterion." In W. T. Ziemba and R. G. Vickson (Eds), *Stochastic Optimization Models in Finance*. New York: Academic Press.

[5] von Neumann, J., and O. Morgenstern (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, NJ: Princeton University Press. 192



第 10 章　随机序关系

10.1　一阶随机占优

设 X 和 Y 是两个随机变量，如果对任意 t，均有

$$P(X > t) \geqslant P(Y > t),$$

则称 X 随机占优 Y(也称 X 随机大于 Y)，记为 $X \geqslant_{st} Y$. 即 $X \geqslant_{st} Y$ 表示：对任意常数 t，X 超过 t 的可能性不低于 Y 超过 t 的可能性.

注　因为概率是随机事件的连续函数，故 $X \geqslant_{st} Y$ 等价于：对任意 t，均有

$$P(X \geqslant t) \geqslant P(Y \geqslant t).$$

下列命题给出了随机占优的一个等价条件.

命题 10.1.1　$X \geqslant_{st} Y$ 当且仅当对任意增函数 h 均有 $E[h(X)] \geqslant E[h(Y)]$.

命题的证明需要下列两个引理.

引理 10.1.1　如果 X 是一个非负随机变量，那么

$$E[X] = \int_0^\infty P(X > t)\mathrm{d}t.$$

证明：任给 $t > 0$，定义随机变量 $I(t)$ 如下：

$$I(t) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } t < X, \\ 0 & \text{如果 } t \geqslant X, \end{cases}$$

则有

$$\int_0^\infty I(t)\mathrm{d}t = \int_0^X I(t)\mathrm{d}t + \int_X^\infty I(t)\mathrm{d}t = X.$$

所以

$$E[X] = E\left[\int_0^\infty I(t)\mathrm{d}t\right] = \int_0^\infty E[I(t)]\mathrm{d}t = \int_0^\infty P(X > t)\mathrm{d}t. \qquad \square$$

引理 10.1.2　如果 $X \geqslant_{st} Y$，那么 $E[X] \geqslant E[Y]$.

证明：首先假定 X 和 Y 均为非负随机变量，则由引理 10.1.1 和随机占优的定义知

$$E[X] = \int_0^\infty P(X > t)\mathrm{d}t \geqslant \int_0^\infty P(Y > t)\mathrm{d}t = E[Y].$$

故对非负随机变量，引理 10.1.2 结论成立.

下面证明一般情形. 因为任意一个实数 a 可以分解为其正部与负部的差，即

$$a = a^+ - a^-,$$

其中，

$$a^+ = \max(a,0),\quad a^- = \max(-a,0).$$

特别地，若 $a \geqslant 0$，则 $a^+ = a$，$a^- = 0$；若 $a < 0$，则 $a^+ = 0$，$a^- = -a$. 所以，如果 $X \geqslant_{st} Y$，且将 X 与 Y 分解为它们的正部与负部的差：

$$X = X^+ - X^-,\quad Y = Y^+ - Y^-.$$

则对任意 $t \geqslant 0$，有

$$\begin{aligned} P(X^+ > t) &= P(X > t) \\ &\geqslant P(Y > t) \quad (\text{因为 } X \geqslant_{st} Y) \\ &= P(Y^+ > t) \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} P(X^- > t) &= P(-X > t) \\ &= P(X < -t) \\ &\leqslant P(Y < -t) \quad (\text{因为 } X \geqslant_{st} Y) \\ &= P(-Y > t) \\ &= P(Y^- > t) \end{aligned}$$

194

因此 $X^+ \geqslant_{st} Y^+$，$X^- \leqslant_{st} Y^-$. 由于上述随机变量都是非负的，故 $E[X^+] \geqslant E[Y^+]$ 且 $E[X^-] \leqslant E[Y^-]$. 因而得到

$$E[X] = E[X^+] - E[X^-] \geqslant E[Y^+] - E[Y^-] = E[Y].$$

引理得证. □

接下来就可以证明命题 10.1.1 了.

命题 10.1.1 的证明： 设 $X \geqslant_{st} Y$，且 h 是一个增函数，为了证明 $E[h(X)] \geqslant E[h(Y)]$，首先证明 $h(X) \geqslant_{st} h(Y)$. 事实上，对任意 t，由 h 是增函数知必存在一个数，记其为 $h^{-1}(t)$，使得事件 $h(X) > t$ 等价于 $X \geqslant h^{-1}(t)$ 或 $X > h^{-1}(t)$（如果存在唯一的数 y 使 $h(y) = t$，则后一种情况成立，此时 $y = h^{-1}(t)$）. 在后一种情况（即 $h(X) > t$ 等价于 $X > h^{-1}(t)$）下，有

$$\begin{aligned} P(h(X) > t) &= P(X > h^{-1}(t)) \\ &\geqslant P(Y > h^{-1}(t)) \\ &= P(h(Y) > t) \end{aligned}$$

若 $h(X) > t$ 等价于 $X \geqslant h^{-1}(t)$，用类似的方法可证上述结论也成立. 所以，由引理 10.1.2 得到 $E[h(X)] \geqslant E[h(Y)]$.

反之，假设对所有增函数 h 均有 $E[h(X)] \geqslant E[h(Y)]$，下面将证明 $X \geqslant_{st} Y$ 成立.

事实上，对固定的 t，定义函数 h_t 如下：

$$h_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } x \leqslant t, \\ 1 & \text{如果 } x > t, \end{cases}$$

195

则 $h_t(x)$是增函数，所以 $E[h_t(X)] \geqslant E[h_t(Y)]$. 又因为 $E[h_t(X)] = P(X>t)$，$E[h_t(Y)] = P(Y>t)$，所以 $X \geqslant_{st} Y$. □

10.2 随机占优中的对偶方法

证明 $X \geqslant_{st} Y$ 的一种方法是寻找随机变量 X' 与 Y'，使它们分别与 X，Y 有相同的分布，且 $X' \geqslant Y'$ 成立. 如果找到了这样的随机变量 X' 与 Y'，因为事件 $Y'>t$ 蕴涵事件 $X'>t$，故

$$P(Y' > t) \leqslant P(X' > t).$$

又因为 $P(X'>t) = P(X>t)$且 $P(Y'>t) = P(Y>t)$，从而 $X \geqslant_{st} Y$. 这种证明随机占优的方法称为*对偶方法*.

例 10.2a 证明泊松随机变量是关于其均值随机增加的. 也就是说，如果一个泊松随机变量的均值为 $\lambda_1 + \lambda_2$，那么它是随机大于均值为 λ_1 的泊松随机变量的，其中，$\lambda_i > 0$，$i=1$，2.

证明：设 X 是均值为 λ 的泊松随机变量，那么

$$P(X \geqslant j) = \sum_{i=j}^{\infty} e^{-\lambda} \lambda^i / i!.$$

从上式很容易看出：对任意的 j，它是 λ 的增函数. 本题使用对偶方法是更容易证明的：设 X_1 和 X_2 是相互独立的两个泊松随机变量，X_i 均值为 λ_i，$i=1$，2. 因为两个独立的泊松随机变量的和仍是泊松随机变量，故 $X_1 + X_2$ 是均值为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松随机变量，由 $X_1 + X_2 \geqslant X_1$ 知结论成立. □

196

如果 $X \geqslant_{st} Y$ 成立，那么总可找到随机变量 X'和 Y'，使它们分别与 X 和 Y 有相同的分布，且 $X' \geqslant Y'$成立. 下面给出当 X 与 Y 是连续型随机变量时该结论的证明. 为了证明的需要，首先引入下列引理.

引理 10.2.1 *设 F 是一个连续型随机变量的分布函数，U 为$(0, 1)$上服从均匀分布的随机变量，那么随机变量 $F^{-1}(U)$的分布函数为 F，其中 $F^{-1}(u)$表示使 $F(F^{-1}(u)) = u$ 的值.*

证明：因为分布函数是增函数，所以不等式 $a \leqslant x$ 等价于 $F(a) \leqslant F(x)$. 因此

$$\begin{aligned} P(F^{-1}(U) \leqslant x) &= P(F(F^{-1}(U)) \leqslant F(x)) \\ &= P(U \leqslant F(x)) \\ &= F(x). \end{aligned}$$

□

命题 10.2.1 *如果 $X \geqslant_{st} Y$，那么存在与 X 同分布的随机变量 X'，与 Y 同分布的随机变量 Y'，使得 $X' \geqslant Y'$.*

证明：设 X 与 Y 均为连续型随机变量，其分布函数分别为 F 与 G，且$X \geqslant_{st} Y$.

由 $X \geqslant_{st} Y$ 知 $F(x) \leqslant G(x)$ 对所有 x 成立．故

$$F(G^{-1}(u)) \leqslant G(G^{-1}(u)) = u = F(F^{-1}(u))$$

因为 F 是增函数，所以由上式得 $G^{-1}(u)) \leqslant F^{-1}(u)$．现设 U 为(0，1)上服从均匀分布的随机变量，$X'=F^{-1}(U)$且 $Y'=G^{-1}(U)$，那么 $X' \geqslant Y'$．由引理 10.2.1 知命题结论成立． □

使用对偶方法很容易得出下面非常重要的结果.

定理 10.2.1 设 X_1，X_2，…，X_n 与 Y_1，Y_2，…，Y_n 均为相互独立的随机变量组成的随机向量，且 $X_i \geqslant_{st} Y_i (i=1, 2, \cdots, n)$，$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$关于每个分量都是增函数，则 $g(X_1, \cdots, X_n) \geqslant_{st} g(Y_1, \cdots, Y_n)$.

197

证明：设 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$关于每个分量都是增函数，F_i 是 X_i 的分布函数，G_i 是 Y_i 的分布函数，$i=1, 2, \cdots, n$．又设 U_1，U_2，…，U_n 为相互独立的随机变量，且均服从(0，1)上的均匀分布．令

$$X'_i = F_i^{-1}(U_i), Y'_i = G_i^{-1}(U_i), i = 1, \cdots, n.$$

因为 $X'_i \geqslant Y'_i$ 对所有 i 成立，则 $g(X'_1, \cdots, X'_n) \geqslant g(Y'_1, \cdots, Y'_n)$．从 $g(X'_1, \cdots, X'_n)$与 $g(X_1, \cdots, X_n)$同分布，$g(Y'_1, \cdots, Y'_n)$与 $g(Y_1, \cdots, Y_n)$同分布知结论成立． □

10.3 似然比序

设 X 与 Y 是两个连续型随机变量，其密度函数分别为 f 和 g．如果$\frac{f(x)}{g(x)}$在 x 满足 $f(x)$与 $g(x)$同时大于 0 的范围上是增函数，则称 X 是似然比大于 Y 的.

类似地，设 X 与 Y 是两个离散型随机变量，称 X 是似然比大于 Y 的，如果$\frac{P(X=x)}{P(Y=x)}$在 x 满足 $P(X=x)$与 $P(Y=x)$同时大于 0 的范围上是增函数.

下面证明似然比序条件要比随机序条件强.

命题 10.3.1 设 X 是似然比大于 Y 的，那么 X 随机大于 Y.

证明：设 X 和 Y 的密度函数分别为 f 与 g(对离散型随机变量考虑其概率分布)，且$\frac{f(x)}{g(x)} \uparrow x$．对任意 a，需要证明

$$\int_{x>a} f(x) \mathrm{d}x \geqslant \int_{x>a} g(x) \mathrm{d}x.$$

(对离散型随机变量用求和代替积分.)分两种情况讨论：

情况 1：$f(a) \geqslant g(a)$

在这种情况下，如果 $x>a$，则 $\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant \frac{f(a)}{g(a)} \geqslant 1$，所以 $f(x) \geqslant g(x)$，结论得证.

198

情况 2：$f(a)<g(a)$

在这种情况下，如果 $x \leqslant a$，则 $\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \frac{f(a)}{g(a)} < 1$，所以有 $\int_{x \leqslant a} f(x)\mathrm{d}x < \int_{x \leqslant a} g(x)\mathrm{d}x$，用 1 减不等式两边，所需结论得证. □

例 10.3a 设 X 是密度函数为 $f(x)$ 的随机变量，称密度函数

$$f_t(x) = C\mathrm{e}^{tx} f(x)$$

为 f 的倾斜度，其中 $C^{-1} = \int \mathrm{e}^{ty} f(y)\mathrm{d}y$. 因为

$$\frac{f_t(x)}{f(x)} = \frac{\mathrm{e}^{tx}}{\int \mathrm{e}^{ty} f(y)\mathrm{d}y}$$

当 $t>0$ 时是 x 的增函数，当 $t<0$ 时是 x 的减函数，所以当 $t>0$ 时，密度函数为 $f_t(x)$ 的随机变量 X_t 是似然比（从而随机）大于 X 的，当 $t<0$ 时，X_t 是似然比（从而随机）小于 X 的. □

10.4 单期投资问题

考虑一个投资问题，设某人在初始时刻有财富 w，他将拿出 $y(0 \leqslant y \leqslant w)$ 的财富去投资. 设当投资量为 y 时，财富在期末的回报量为 $yX+(1+r)(w-y)$，其中 X 是分布已知的非负随机变量，r 是来自非投资部分的利率. 对一个给定的递增、凹的效用函数 u，本节的目标是最大化期末财富的期望值. 即记 $\beta=1+r$，目标是求

$$M = \max_{0 \leqslant y \leqslant w} E[u(yX + \beta(w-y))].$$

当 X 为连续型随机变量，且密度函数为 f 时，有

$$\begin{aligned} M &= \max_{0 \leqslant y \leqslant w} E[u((X-\beta)y + \beta w)] \\ &= \max_{0 \leqslant y \leqslant w} \int_{-\infty}^{\infty} u((x-\beta)y + \beta w) f(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

199

对 max 符号里面的项求导，得到

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^{\infty} u((x-\beta)y + \beta w) f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} u'((x-\beta)y + \beta w)(x-\beta) f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$=\int_0^{\infty} h(y,x)f(x)\mathrm{d}x,$$

其中，

$$h(y,x)=u'((x-\beta)y+\beta w)(x-\beta).$$

记取到最大值的点为 y_f，则在 y_f 点，上面的导数应为 0，即

$$\int_0^{\infty} h(y_f,x)f(x)\mathrm{d}x=0. \tag{10-1}$$

为了继续讨论下去，需要用到 $h(y,\ x)$的下列性质：

引理 10.4.1 对固定的 x，$h(y,\ x)$是 y 的减函数，且

$$h(y,x)\leqslant 0 \quad 当\ x\leqslant\beta\ 时,$$
$$h(y,x)\geqslant 0 \quad 当\ x\geqslant\beta\ 时.$$

证明：

情况 1： $x\leqslant\beta$

$h(y,\ x)\downarrow y$ 由下列过程可以推出：

$$x\leqslant\beta\Rightarrow(x-\beta)y+\beta w\downarrow y$$
$$\Rightarrow u'((x-\beta)y+\beta w)\uparrow y \quad (u\ 为凹函数\ \Rightarrow u'(v)\downarrow v)$$
$$\Rightarrow h(y,x)=(x-\beta)u'((x-\beta)y+\beta w)\downarrow y,$$

200 且由 $x-\beta\leqslant 0$ 及 $u'\geqslant 0$(因为 u 是增函数)得 $h(y,\ x)\leqslant 0$.

情况 2： $x\geqslant\beta$

$$x\geqslant\beta\Rightarrow(x-\beta)y+\beta w\uparrow y$$
$$\Rightarrow u'((x-\beta)y+\beta w)\downarrow y \quad (因为\ u'(v)\downarrow v)$$
$$\Rightarrow h(y,x)=(x-\beta)u'((x-\beta)y+\beta w)\downarrow y.$$

又因为 $h(y,\ x)$为两个非负函数的乘积，故它也是非负的. □

下面讨论初始财富为 w 的某投资者的两种投资方案：一种是乘积项的随机变量为 X_1，另一种是乘积项的随机变量为 X_2，其中 X_1的密度函数为 f，X_2的密度函数为 g. 在 f 与 g 满足什么条件下，对所有递增、凹的效用函数都有第一种方案的最优投资额不少于第二种方案的最优投资额？即什么时候有 $y_f\geqslant y_g$？凭直觉，人们可能猜测只需 X_1随机大于 X_2就足够了，但下面的例子说明该猜测是不对的.

例 10.4a 设效用函数为

$$u(x)=\begin{cases}x & 如果\ x\leqslant 100,\\ 100 & 如果\ x>100,\end{cases}$$

且假定

$$P(X_1=4)=P(X_1=0)=1/2$$

及

$$P(X_2 = 3) = P(X_2 = 0) = 1/2,$$

则不难看出 X_1 是随机大于 X_2 的. 再假定初始财富为 $w=30$，利率 $r=0$. 因为效用函数当 x 大于或等于 100 时是一条水平线，所以 X_1 对应的投资量不能超过 70/3. 这是因为，如果超过了 70/3，当 $X_1=4$ 时，与投资 70/3 的效用值相同(均为 100)；当 $X_1=0$ 时，效用值比投资 70/3 反而小. 另一方面，容易看出 X_2 对应的投资量是 30. □ [201]

从例 10.1 可以看出，有随机更大的投资回报因子，并不意味着需要更大的投资量，但这一结论对似然比序是正确的.

定理 10.4.1 *如果 f 与 g 是两个非负随机变量的密度函数，且$\frac{f(x)}{g(x)}$是 x 的增函数，则 $y_f \geqslant y_g$. 即当 f 按似然比序大于 g 时，密度函数为 f 的乘积因子对应的最优投资量大于密度函数为 g 的乘积因子对应的最优投资量.*

证明： 由式(10-1)知，当 X 的密度函数为 g 时，其最优投资量 y_g 满足

$$\int_0^\infty h(y_g,x)g(x)\mathrm{d}x = 0.$$

下面证明：如果$\frac{f(x)}{g(x)}\uparrow x$，那么 $y_f \geqslant y_g$，其中，y_f 满足

$$\int_0^\infty h(y_f,x)f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

事实上，由 $h(y, x)$是关于 y 的减函数(由引理 10.4.1)，推出不等式 $y_f \geqslant y_g$ 等价于不等式

$$\int_0^\infty h(y_g,x)f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^\infty h(y_f,x)f(x)\mathrm{d}x.$$

接下来只需证明

$$\int_0^\infty h(y_g,x)f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

就可以了. 因为

$$\int_0^\infty h(y_g,x)f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\beta h(y_g,x)f(x)\mathrm{d}x + \int_\beta^\infty h(y_g,x)f(x)\mathrm{d}x,$$

如果 $x \leqslant \beta$，那么$\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \frac{f(\beta)}{g(\beta)}$，从而有 $f(x) \leqslant \frac{f(\beta)}{g(\beta)}g(x)$. 另一方面，从 $x \leqslant \beta$ 及引理 10.4.1 可得到 $h(y_g, x) \leqslant 0$. 所以

$$\int_0^\beta h(y_g,x)f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{f(\beta)}{g(\beta)}\int_0^\beta h(y_g,x)g(x)\mathrm{d}x. \tag{10-2}$$ [202]

如果 $x \geqslant \beta$，则$\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant \frac{f(\beta)}{g(\beta)}$，且由引理 10.4.1 有 $h(y_g, x) \geqslant 0$，因此

$$\int_{\beta}^{\infty} h(y_g, x) f(x) \mathrm{d}x \geqslant \frac{f(\beta)}{g(\beta)} \int_{0}^{\infty} h(y_g, x) g(x) \mathrm{d}x. \tag{10-3}$$

由式(10-2)和式(10-3)得到

$$\int_{0}^{\infty} h(y_g, x) f(x) \mathrm{d}x \geqslant \frac{f(\beta)}{g(\beta)} \int_{0}^{\infty} h(y_g, x) g(x) \mathrm{d}x = 0,$$

结论得证. □

10.5 二阶占优

X 随机占优 Y 要求 $E[h(X)] \geqslant E[h(Y)]$ 对所有增函数 h 均成立. 人们只要求对所有凹的增函数 h 成立，而不需要对所有增函数 h 成立这样的条件感兴趣，即对只需投资者有一个递增、凹的效用函数时，就可在 X 对应的最终财富与 Y 对应的最终财富之间做出选择这个问题感兴趣.

定义 如果 $E[h(X)] \geqslant E[h(Y)]$ 对所有递增且凹的函数 h 成立，则称 X 二阶占优 Y，记为 $X \geqslant_{icv} Y$.

注

1)使用记号 $X \geqslant_{icv} Y$，是因为术语“X 二阶占优 Y”的等价术语是“在递增、凹的意义下，X 随机大于 Y”.

2)如果 X 的期望值为 $E[X]$，则由詹森不等式(见 9.2 节)知常数随机变量 $E[X]$ 二阶占优 X.

对给定常数 a，定义函数 h_a 如下：

203

$$h_a(x) = \begin{cases} x & \text{如果 } x \leqslant a, \\ a & \text{如果 } x > a. \end{cases}$$

因为当 $x \leqslant a$ 时，h_a 是一条递增的直线，当到达 a 后，就变成水平线了，所以它是一个递增的凹函数，记

$$h_a(X) = a - (a - h_a(X)).$$

对非负随机变量 $a - h_a(X)$ 应用引理 10.1.1 得

$$\begin{aligned} E[h_a(X)] &= a - E[a - h_a(X)] \\ &= a - \int_{0}^{\infty} P(a - h_a(X) > t) \mathrm{d}t \\ &= a - \int_{0}^{\infty} P(h_a(X) < a - t) \mathrm{d}t \\ &= a - \int_{0}^{\infty} P(X < a - t) \mathrm{d}t \\ &= a - \int_{-\infty}^{a} P(X < y) \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

由上式得到，如果 X 是二阶随机占优 Y 的，则

$$\int_{-\infty}^{a} P(X < y)\mathrm{d}y \leqslant \int_{-\infty}^{a} P(Y < y)\mathrm{d}y, \text{对所有 } a. \tag{10-4}$$

事实上，可以证明上式也是 $X \geqslant_{icv} Y$ 的一个充分条件，即下列定理成立.

定理 10.5.1 *X 二阶随机占优 Y 当且仅当式(10-4)成立.*

虽然上面的定理给出了一个随机变量二阶随机占优另一个随机变量的充分必要条件，但是对两个正态随机变量，通常不用它来判定.

10.5.1 正态随机变量

在这一小节里，将证明正态随机变量在二阶随机占优意义下是均值递增、方差递减的，即下列定理成立. [204]

定理 10.5.2 *如果 $X_i(i=1, 2)$ 分别是均值为 μ_i，方差为 σ_i^2 的正态随机变量，那么*

$$\mu_1 \geqslant \mu_2, \sigma_1 \leqslant \sigma_2 \Rightarrow X_1 \geqslant_{icv} X_2.$$

为了证明该定理，首先需要下面的命题，它指出：一个随机变量 X 的任意两个增函数有非负的协方差.

命题 10.5.1 *如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个 x 的增函数，则对任一随机变量 X，有*

$$E[f(X)g(X)] \geqslant E[f(X)E[g(X)].$$

如果 f 与 g 中一个为增函数，另一个为减函数，则

$$E[f(X)g(X)] \leqslant E[f(X)E[g(X)].$$

证明： 设 X 与 Y 是独立同分布的随机变量，且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个 x 的增函数，那么 $f(X)-f(Y)$ 与 $g(X)-g(Y)$ 有相同的符号(如果 $X \geqslant Y$，两个均为非负；如果 $X \leqslant Y$，两个均为非正). 所以

$$(f(X)-f(Y))(g(X)-g(Y)) \geqslant 0,$$

从而有

$$f(X)g(X)+f(Y)g(Y) \geqslant f(X)g(Y)+f(Y)g(X).$$

两边取期望，得

$$E[f(X)g(X)]+E[f(Y)g(Y)] \geqslant E[f(X)g(Y)]+E[f(Y)g(X)].$$

在上式中考虑 X 与 Y 的独立性，得

$$E[f(X)g(X)]+E[f(Y)g(Y)] \geqslant E[f(X)]E[g(Y)]+E[f(Y)]E[g(X)].$$

又因为 X 与 Y 同分布，所以，

$$E[f(Y)g(Y)] = E[f(X)g(X)],$$

且

$$E[f(Y)] = E[f(X)], E[g(Y)] = E[g(X)].$$

[205]

从而有

$$2E[f(X)g(X)] \geqslant 2E[f(X)]E[g(X)],$$

结论得证.

如果 f 是减函数，g 是增函数，那么由上式有

$$E[-f(X)g(X)] \geqslant E[-f(X)]E[g(X)],$$

两边同乘－1，则有

$$E[f(X)g(X)] \leqslant E[f(X)]E[g(X)].$$

证毕. □

定理 10.5.2 的证明也需要下列引理.

引理 10.5.1 *如果 $E[X]=0$，$c \geqslant 1$ 是常数，那么 $X \geqslant_{icv} cX$.*

证明: 设 h 是一个递增的凹函数，$c \geqslant 1$. 将 $h(cx)$ 在点 x 使用泰勒公式，则存在介于 x 与 cx 之间的某个数 w 使

$$\begin{aligned} h(cx) &= h(x) + h'(x)(cx-x) + h''(w)(cx-x)^2/2! \\ &\leqslant h(x) + h'(x)(cx-x), \end{aligned}$$

最后的不等式是因为 h 为凹函数，从而有 $h''(w) \leqslant 0$. 由于上式对任意 x 均成立，所以

$$h(cX) \leqslant h(X) + (c-1)Xh'(X).$$

两边取期望得

$$\begin{aligned} E[h(cX)] &\leqslant E[h(X)] + (c-1)E[Xh'(X)] \\ &\leqslant E[h(X)] + (c-1)E[X]E[h'(X)] \\ &= E[h(X)], \end{aligned}$$

[206] 其中，第二个不等式利用了命题 10.5.1，因为 $f(x)=x$ 是增函数，h 是凹函数，$h'(x)$ 是 x 的减函数. 最后一项等式是由于 $E[X]=0$. □

现在就可以证明定理 10.5.2 了.

定理 10.5.2 的证明: 设 $\mu_1 \geqslant \mu_2$，$\sigma_1 \leqslant \sigma_2$ 且 Z 是服从均值为 0，方差为 1 的正态分布的随机变量. 在引理 10.5.1 中取 $c=\sigma_2/\sigma_1 \geqslant 1$ 得 $\sigma_1 Z \geqslant_{icv} c\sigma_1 Z = \sigma_2 Z$. 又设 $h(x)$ 是 x 的递增的凹函数，则

$$\begin{aligned} E[h(\mu_1+\sigma_1 Z)] &\geqslant E[h(\mu_2+\sigma_1 Z)] \text{（因为 } \mu_1 \geqslant \mu_2 \text{ 且 } h \text{ 是增函数）} \\ &\geqslant E[h(\mu_2+\sigma_2 Z)] \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式是由于 $g(x)=h(\mu_2+x)$ 是关于 x 的递增的凹函数，且 $\sigma_1 Z \geqslant_{icv} \sigma_2 Z$. 定理的结果由 $\mu_i+\sigma_i Z$ 是均值为 μ_i，方差为 σ_i^2 的正态随机变量马上得到. □

10.5.2 二阶占优的进一步讨论

二阶占优有一个有用的结果：如果 X_1，X_2，…，X_n 与 Y_1，Y_2，…，Y_n 是

两个独立的随机向量，且对每个 i，X_i 二阶随机占优 Y_i，那么所有 X_i 的和也二阶随机占优所有 Y_i 的和.

定理 10.5.3 设 X_1，X_2，…，X_n 与 Y_1，Y_2，…，Y_n 都是由 n 个独立随机变量构成的向量，且对 $i=1$，2，…，n，均有 $X_i \geqslant_{icv} Y_i$，那么 $\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant_{icv} \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

证明：设 h 是一个递增的凹函数，仅需证明

$$E\left[h\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] \geqslant E\left[h\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\right]$$

就可以了. 对 n 使用数学归纳法. 当 $n=1$ 时，结论显然成立. 假设 $n-1$ 时结论成立. 下面证明对 n 结论也成立.

对由 n 个相互独立的随机变量构成的随机向量 X_1，X_2，…，X_n 与 Y_1，Y_2，…，Y_n，不失一般性，设这两个随机向量也是相互独立的(因为这样的假设不影响 $E\left[h\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right]$ 与 $E\left[h\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\right]$ 的值，所以这样的假设是不失一般性的). 207

下面首先证明

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant_{icv} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i + X_n.$$

为此，对任意 x，定义函数 $h_x(a)=h(x+a)$. 注意到 h_x 是一个递增的凹函数，所以

$$\begin{aligned}
&E\left[h\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \mid X_n = x\right] \\
&= E\left[h\left(x + \sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) \mid X_n = x\right] \\
&= E\left[h\left(x + \sum_{i=1}^{n-1} X_i\right)\right] \qquad \text{(由独立性)} \\
&= E\left[h_x\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right)\right] \\
&\geqslant E\left[h_x\left(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i\right)\right] \qquad \text{(由归纳假设)} \\
&= E\left[h\left(x + \sum_{i=1}^{n-1} Y_i\right)\right] \\
&= E\left[h\left(x + \sum_{i=1}^{n-1} Y_i\right) \mid X_n = x\right] \qquad \text{(由独立性)} \\
&= E\left[h\left(X_n + \sum_{i=1}^{n-1} Y_i\right) \mid X_n = x\right].
\end{aligned}$$

因此，

$$E\left[h\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \mid X_n\right] \geqslant E\left[h(X_n + \sum_{i=1}^{n-1} Y_i) \mid X_n\right],$$

对上式两边取期望得

208

$$E\left[h\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] \geqslant E\left[h\left(X_n + \sum_{i=1}^{n-1} Y_i\right)\right].$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant_{icv} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i + X_n.$$

下面证明 $\sum_{i=1}^{n-1} Y_i + X_n \geqslant_{icv} \sum_{i=1}^{n} Y_i$，如已证，则定理得证. 注意到

$$E\left[h\left(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i + X_n\right) \mid \sum_{i=1}^{n-1} Y_i = y\right]$$

$$= E[h_y(X_n)] \geqslant E[h_y(Y_n)] = E\left[h\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \mid \sum_{i=1}^{n-1} Y_i = y\right],$$

其中，不等式是由于 h_y 是递增的凹函数，等式是由于随机变量之间的独立性. 由上式得到

$$E\left[h\left(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i + X_n\right) \mid \sum_{i=1}^{n-1} Y_i\right] \geqslant E\left[h\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \mid \sum_{i=1}^{n-1} Y_i\right].$$

两边取期望得

$$E\left[h\left(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i + X_n\right)\right] \geqslant E\left[h\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\right].$$

因此，$\sum_{i=1}^{n-1} Y_i + X_n \geqslant_{icv} \sum_{i=1}^{n} Y_i$. 证毕. □

注 定理 10.5.3 结合中心极限定理可以给出下列结论的另一证明：一个正态随机变量当方差增加时，二阶占优意义下减少.

事实上，设 $\sigma_2 > \sigma_1$，X 等可能地取 σ_1 或 $-\sigma_1$，Y 等可能地取 σ_2 或 $-\sigma_2$.

由

$$h(-\sigma_1) + h(\sigma_1) \geqslant h(-\sigma_2) + h(\sigma_2)$$

且 h 是递增的凹函数，得 $X \geqslant_{icv} Y$(因为 Y 与 $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}X$ 同分布，所以 $X \geqslant_{icv} Y$ 也可由引理 10.5.1 得到). 现设 $X_i(i \geqslant 1)$是独立同分布的随机变量，每个变量均与 X 同分布；$Y_i(i \geqslant 1)$也是独立同分布的随机变量，每个变量均与 Y 同分布. 那么由定理 10.5.3 知

209

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant_{icv} \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

对任意正常数 c，显然由 $W \geqslant_{icv} V$ 可推出 $cW \geqslant_{icv} cV$，所以

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}} \geqslant_{icv} \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{n}}.$$

因为上式左边收敛于一个均值为 0，方差为 σ_1^2 的正态随机变量，右边收敛于一个均值为 0，方差为 σ_2^2 的正态随机变量，故在上式中两边对 $n \to \infty$ 取极限得到所需结果.（当然，要使这个过程更加严谨，还需证明二阶随机占优取极限后仍成立.）

10.6 习题

练习 10.1 设

$$P(X_i = 1) = p_i = 1 - P(X_i = 0), \quad i = 1,2,$$

且 $p_1 \geqslant p_2$，求证：$X_1 \geqslant_{st} X_2$.

练习 10.2 设 $X(n, p)$表示服从参数为 n，p 的二项分布的随机变量，求证：$X(n+1, p) \geqslant_{st} X(n, p)$.

练习 10.3 设 $X(n, p)$表示服从参数为 n，p 的二项分布的随机变量，且 $p_1 \geqslant p_2$，求证：$X(n, p_1) \geqslant_{st} X(n, p_2)$.

练习 10.4 设 $X_i (i=1, 2)$是服从均值为 μ_i，方差为 σ^2的正态随机变量，且 $\mu_1 \geqslant \mu_2$，求证：

$$X_1 \geqslant_{lr} X_2.$$

练习 10.5 设 $X_i (i=1, 2)$是服从指数分布的随机变量，其密度函数为 $f_i(x) = \lambda_i e^{-\lambda_i x}$，且 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$，求证：$X_1 \geqslant_{lr} X_2$.

练习 10.6 设 $X_i (i=1, 2)$服从参数为 λ_i 的泊松分布，且 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$，求证：$X_1 \geqslant_{lr} X_2$.

练习 10.7 求证：$E[X] \geqslant_{icv} X$.

练习 10.8 已知 h 是一个凹函数，且 $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$，求证：

$$h(-\sigma_1) + h(\sigma_1) \geqslant h(-\sigma_2) + h(\sigma_2).$$

210

提示：因为 h'是减函数，所以 $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} h'(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\sigma_2}^{-\sigma_1} h'(x)\mathrm{d}x$.

练习 10.9 已知 $X \geqslant_{icv} Y$，且 g 是一个递增的凹函数，求证：$g(X) \geqslant_{icv} g(Y)$.

参考文献

[1] Ross, S. , and E. Pekoz(2007). *A Second Course in Probability*, ProbabilityBookstore. com.

[2] Shaked, M. , and J. G. Shanthikumar(1994). *Stochastic Orders and Their Applications*, Academic Press.

211

第 11 章　最优化模型

11.1　引言

本章将讨论一些单期投资的最优化问题，这些投资并不一定和公开交易证券的价格变化有关. 11.2 节引入一个确定性最优化问题，其目的是要确定一个有效的算法，使得当将固定数量的资金整体地投资到 n 个具有不同回报函数的项目时，可以找到最优投资策略. 11.2.1 节提出了一种动态规划算法，用它可以解决上面提到的问题；11.2.2 节给出了当所有回报函数都是凹函数时的一个更为有效的算法；11.2.3 节分析了一种称为背包问题的特殊情形，在这种情况下，项目投资可通过购买整数股份来实现，且每个项目的回报都是所购买股数的线性函数. 11.3 节中考虑概率起关键作用的一类模型. 11.3.1 节讨论输赢概率未知的赌博模型；11.3.2 节讨论投资机会的次数为随机时的顺序投资分配模型.

11.2　确定性最优化模型

假设将 m 美元投资到 n 个项目，在项目 i 中投资 x 可以得到回报（现值）$f_i(x)$，$i=1$，…，n. 要考虑的问题是，如何确定投资到每一个项目中的整数金额以使得回报的总和达到最大. 这就是说，如果令 x_i 表示投资到项目 i 中的资金，那么这个问题数学上表示为：

$$\text{选择非负整数 } x_1,\cdots,x_n$$

$$\text{满足} \sum_{i=1}^{n} x_i = m$$

$$\text{使得} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \text{ 达到最大}$$

212

11.2.1　基于动态规划的一般解法

为解决前面提出的问题，令 $V_j(x)$ 表示当项目 1，…，j 的总投资为 x 时，可能得到的最大总回报，$V_n(m)$ 代表在 11.2 节中提出的问题的最大值. 首先对于 $j=1$，进而对于 $j=2$，直至最终对 $j=n$，寻找当 $x=1$，…，m 时 $V_j(x)$的值，以决定 $V_n(m)$和最优投资金额.

因为当 x 全部投资到项目 1 时最大回报是 $f_1(x)$，则有

$$V_1(x) = f_1(x).$$

现在假设 x 必须投资到项目 1 和项目 2 之中. 如果在项目 2 中投资 y，那么所剩的全部金额 $x-y$ 可以投资到项目 1 中. 因为 $x-y$ 投资到项目 1 中的最大回报是 $V_1(x-y)$，所以当金额 y 投资到项目 2 时，可能的最大回报总和是

$f_2(y)+V_1(x-y)$. 由于可能的最大回报是通过对 y 取上面式子的最大值，因而得到

$$V_2(x)=\max_{0\leqslant y\leqslant x}\{f_2(y)+V_1(x-y)\}.$$

一般地，假设 x 必须投资到项目 1，…，j 中. 如果投资 y 到项目 j 中，那么所剩的全部 $x-y$ 可以投资到项目 1，…，$j-1$ 中. 因为将 $x-y$ 投资到项目 1，…，$j-1$ 中的最大回报是 $V_{j-1}(x-y)$，那么当金额 y 投资到项目 j 时，可能的最大回报总和是 $f_j(y)+V_{j-1}(x-y)$. 由于可能的最大回报是通过对 y 取上面式子的最大值，因此得到

$$V_j(x)=\max_{0\leqslant y\leqslant x}\{f_j(y)+V_{j-1}(x-y)\}.$$

如果令 $y_j(x)$表示使得上式右侧最大化的 y 值(或者多个值之中的一个)，那么$y_j(x)$就是将 x 投资到项目 1，…，j 中时，在项目 j 中投资的最佳金额.

$V_n(m)$的值可以通过首先确定 $V_1(x)$，然后依次确定 $V_2(x)$，$V_3(x)$，…，$V_{n-1}(x)$，进而最终确定 $V_n(m)$来得到. 投资到项目 n 中的最佳投资金额由 $y_n(m)$给出；投资到项目 $n-1$ 中的最佳投资金额由 $y_{n-1}(m-y_n(m))$给出；依此类推.

213

将问题视为 n 个顺序决策，首先研究最后决策的最优值，再分析其前一个的最优值，并依此类推以分析整个问题的方法，称为*动态规划法*.（在前面 8.3 节中，用过动态规划法来给美式看跌期权定价，并用它找到了这种期权的一个最佳执行策略.）

例 11.2a 假设三个投资项目分别有以下的回报函数：

$$f_1(x)=\frac{10x}{1+x},\quad x=0,1,\cdots,$$

$$f_2(x)=\sqrt{x},\quad x=0,1,\cdots,$$

$$f_3(x)=10(1-\mathrm{e}^{-x}),\quad x=0,1,\cdots,$$

有 5 单位资金可以用来投资，要确定其最大的投资回报. 现在，

$$V_1(x)=f_1(x)=\frac{10x}{1+x},\quad y_1(x)=x.$$

因为

$$V_2(x)=\max_{0\leqslant y\leqslant x}\{f_2(y)+V_1(x-y)\}=\max_{0\leqslant y\leqslant x}\left\{\sqrt{y}+\frac{10(x-y)}{1+x-y}\right\},$$

则有

$$V_2(1)=\max\{10/2,1\}=5,\quad y_2(1)=0,$$

$$V_2(2)=\max\{20/3,1+5,\sqrt{2}\}=20/3,\quad y_2(2)=0,$$

$$V_2(3)=\max\{30/4,1+20/3,\sqrt{2}+5,\sqrt{3}\}=23/3,\quad y_2(3)=1,$$

$V_2(4)=\max\{40/5,1+30/4,\sqrt{2}+20/3,\sqrt{3}+5,\sqrt{4}\}=8.5$, $y_2(4)=1$,

$V_2(5)=\max\{50/6,1+8,\sqrt{2}+7.5,\sqrt{3}+20/3,\sqrt{4}+5,\sqrt{5}\}=9$, $y_2(5)=1$.

继续计算可以得到

$$V_3(x)=\max_{0\leqslant y\leqslant x}\{f_3(y)+V_2(x-y)\}=\max_{0\leqslant y\leqslant x}\{10(1-e^{-y})+V_2(x-y)\}.$$

[214]

利用

$$1-e^{-1}=0.632,\quad 1-e^{-2}=0.865,\quad 1-e^{-3}=0.950,$$
$$1-e^{-4}=0.982,\quad 1-e^{-5}=0.993,$$

有

$$V_3(5)=\max\{9,6.32+8.5,8.65+23/3,$$
$$9.50+20/3,9.82+5,9.93\}=16.32,$$
$$y_3(5)=2.$$

这样，投资 5 个单位金额可以得到的最大回报总和为 16.32；投资到项目 3 中的最佳投资金额为 $y_3(5)=2$；投资到项目 2 中的最佳投资金额为 $y_2(3)=1$；而投资到项目 1 中的最佳投资金额为 $y_1(2)=2$. □

11.2.2 凹回报函数的解法

当回报函数满足特定条件时，可以找到更为有效的算法来解决前面提到的问题. 例如，假设每一个函数 $f_i(x)$ 都是凹函数. 称函数 $g(i)(i=0,1,\cdots)$ 是凹的，如果它满足

$$g(i+1)-g(i)\ \text{对于}\ i\ \text{是非增的}$$

这就是说，如果从每一个额外的单位投资中得到的收益(或称边际收益)随着投资的金额变多而减小，那么回报函数就是凹的.

假设所有的函数 $f_i(x)$，$i=1,\cdots,n$ 都是凹的，再一次考虑前面提到的问题，选择非负的整数 $x_1,\cdots,x_n$，其和为 m，使得 $\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i)$ 达到最大. 假设 $x_1^o,\cdots,x_n^o$ 是这个问题的最优解向量：它们是和为 m 的非负整数向量，满足

$$\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i^o)=\max\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i),$$

上式是对所有和为 m 的非负整数 $x_1,\cdots,x_n$ 取最大值. 现在假设有金额 $m+1$ 可以用来投资. 下面将证明，存在一个最优的向量 $y_1^o,\cdots,y_n^o$，$\sum_{i=1}^{n}y_i^o=m+1$，满足

[215]

$$y_i^o\geqslant x_i^o,\quad i=1,\cdots,n. \tag{11-1}$$

为了证明式(11-1)，假设有金额 $m+1$ 可以用来投资，考虑投资策略 $y_1,\cdots,y_n$，

设其满足 $\sum_{i=1}^{n} y_i = m+1$ 且对于某个 k 值，有

$$y_k < x_k^o.$$

因为 $m+1 = \sum_i y_i > \sum_i x_i^o = m$,所以一定存在 j 满足

$$x_j^o < y_j.$$

现在要证明，当有金额 $m+1$ 可以投资时，投资 y_k+1 于项目 k 中，y_j-1 于项目 j 中，y_i 于项目 $i(i \neq k$ 或 $j)$中的投资策略至少和对于每个 i，投资 y_i 于项目 i 中的投资策略一样好. 为了证明这个新的投资策略至少和原来的 y 策略一样好，仅需证明

$$f_k(y_k+1) + f_j(y_j-1) \geqslant f_k(y_k) + f_j(y_j),$$

或者，等价地，证明

$$f_k(y_k+1) - f_k(y_k) \geqslant f_j(y_j) - f_j(y_j-1). \tag{11-2}$$

因为当有金额 m 可以用来投资时，x_1^o，…，x_n^o 是最优的投资额，因此有

$$f_k(x_k^o) + f_j(x_j^o) \geqslant f_k(x_k^o-1) + f_j(x_j^o+1),$$

或者，等价地，有

$$f_k(x_k^o) - f_k(x_k^o-1) \geqslant f_j(x_j^o+1) - f_j(x_j^o). \tag{11-3}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&f_k(y_k+1) - f_k(y_k) \\
&\geqslant f_k(x_k^o) - f_k(x_k^o-1) \quad (\text{由函数的凹性,因为 } y_k+1 \leqslant x_k^o) \\
&\geqslant f_j(x_j^o+1) - f_j(x_j^o) \quad (\text{由式(11-3)}) \\
&\geqslant f_j(y_j) - f_j(y_j-1) \quad (\text{由函数的凹性,因为 } x_j^o+1 \leqslant y_j).
\end{aligned}$$

216

这就证明了不等式(11-2). 这个不等式是说，任何一个投资金额为 $m+1$、而要求在某一个项目 k 中投资额少于 x_k^o 的投资策略，都至少和以下的投资策略相当：在项目 k 中的投资额增加 1，而在某个投资额大于 x_j^o 的项目 j 中相应地减少 1. 重复这个论断可以得知，对于任意投资金额为 $m+1$ 的策略，都可以找到另外一个策略，对于所有的 $i=1$，…，n，在项目 i 中至少投资 x_i^o，而回报至少和原来的投资策略相同. 但是这意味着对于投资金额为 $m+1$，可以找到最佳投资策略 y_1^o，…，y_n^o 满足不等式(11-1).

因为投资金额为 $m+1$ 的最优策略至少在每个项目中的投资额都和投资金额为 m 的最优策略是相同的，因此投资金额为 $m+1$ 的最优策略可以通过利用投资金额为 m 的最优策略，并将额外的 1 美元投资于边际增长最大的那个项目来得到. 所以，投资金额为 m 的最优策略，可以首先解决投资金额只有 1 的情况，进而研究金额为 2 的情况，再研究金额为 3 的情况，并依此类推.

例 11.2b 重新考虑例 11.2a，其中有金额 5 用来投资于三个项目中，这三个项目的回报函数分别为

$$f_1(x) = \frac{10x}{1+x},$$

$$f_2(x) = \sqrt{x},$$

$$f_3(x) = 10(1-\mathrm{e}^{-x}).$$

令 $x_i(j)$表示将总量 j 用来投资时，投资于项目 i 的最佳金额. 因为

$$\max\{f_1(1), f_2(1), f_3(1)\} = \max\{5, 1, 6.32\} = 6.32,$$

则有

$$x_1(1) = 0, \quad x_2(1) = 0, \quad x_3(1) = 1.$$

由

$$\max_i\{f_i(x_i(1)+1) - f_i(x_i(1))\} = \max\{5, 1, 8.65 - 6.32\} = 5,$$

有

$$x_1(2) = 1, \quad x_2(2) = 0, \quad x_3(2) = 1.$$

217

因为

$$\max_i\{f_i(x_i(2)+1) - f_i(x_i(2))\} = \max\{20/3 - 5, 1, 8.65 - 6.32\} = 2.33,$$

所以

$$x_1(3) = 1, \quad x_2(3) = 0, \quad x_3(3) = 2.$$

现在从

$$\max_i\{f_i(x_i(3)+1) - f_i(x_i(3))\} = \max\{20/3 - 5, 1, 9.50 - 8.65\} = 1.67$$

得到

$$x_1(4) = 2, \quad x_2(4) = 0, \quad x_3(4) = 2.$$

最后由

$$\max_i\{f_i(x_i(4)+1) - f_i(x_i(4))\} = \max\{30/4 - 20/3, 1, 9.50 - 8.65\} = 1$$

得到

$$x_1(5) = 2, \quad x_2(5) = 1, \quad x_3(5) = 2.$$

因此，最大回报为 6.32+5+2.33+1.67+1=16.32. □

下面的算法可以用来解决将金额 m 投资到 n 个项目中，并且每一个项目均具有凹的回报函数的情况. k 代表当前待投资的总额，x_i 代表金额 k 用于投资时，投资到项目 i 中的最佳投资额.

算法

1)置 $k=0$，$x_i=0$，$i=1$，…，n.

2)$m_i=f_i(x_i+1)-f_i(x_i)$，$i=1$，…，n.

3)$k=k+1$.

218

4)令 J 满足 $m_J=\max_i m_i$.

5)如果 $J=j$，那么

$$x_j \to x_j+1,$$

$$m_j \to f_j(x_j+1)-f_j(x_j).$$

6)如果 $k<m$，返回步骤 3).

步骤 5)的意思是说，如果 J 的值为 j，那么：a)x_j 的值要增加 1；b) m_j 的值需要重新设置使其等于下面两个数之差：在 1 加上 x_j 的新值处所估计的 f_j 和在 x_j 处估计的 f_j.

注 当 $g(x)$的定义域是一个区间时，如果 $g'(t)$是 t 的减函数(即 $g''(t)\leqslant 0$)，那么 g 是凹的. 因此，当 g 是凹函数时

$$\int_i^{i+1} g'(s)\mathrm{d}s \leqslant \int_{i-1}^{i} g'(s)\mathrm{d}s,$$

从而

$$g(i+1)-g(i) \leqslant g(i)-g(i-1).$$

上式常用来作为定义在整数集上的函数 g 是凹函数的定义.

11.2.3 背包问题

假设通过购买整数份额来投资于项目 i，每一份要投入 c_i，回报为 v_i. 如果令 x_i 表示在项目 i 中购买的份额数，那么当一个人最多可以在 n 个项目中投资 m 单位金额时，这个问题可以表述为：

$$\text{选择非负的整数 } x_1,\cdots,x_n$$

$$\text{满足} \sum_{i=1}^{n} x_i c_i \leqslant m$$

$$\text{以使得} \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \text{ 最大化}$$

下面使用动态规划的方法来解这个问题. 以 $V(x)$表示投资 x 时所能得到的最大可能回报. 如果一开始购买了一份项目 i 的股份，那么可以得到回报 v_i，并且剩下资金 $x-c_i$. 因为 $V(x-c_i)$是从金额 $x-c_i$ 中可能得到的最大回报，所以如果有资金 x，并且一开始购买了一份项目 i，那么可能得到的最大回报是：

219

$$\text{一开始购买一份项目 } i \text{ 的最大回报} = v_i + V(x-c_i).$$

因此，从投资资本 x 中可以得到的最大回报 $V(x)$满足

$$V(x) = \max_{i:c_i \leqslant x}\{v_i + V(x - c_i)\}. \tag{11-4}$$

令 $i(x)$表示使得等式(11-4)右侧最大的 i 的值．那么，如果有资金 x，最佳的投资是购买一份项目 $i(x)$．从下式开始：

$$V(1) = \max_{i:c_i \leqslant 1} v_i,$$

很容易确定 $V(1)$和 $i(1)$，再使用它们，并通过等式(11-4)来确定 $V(2)$和 $i(2)$，依此类推.

注 这个问题之所以称为背包问题，是因为它在数学上等价于如何选择一组物品放进一个背包中去，该背包所能携带的总重量至多为 m，可选择物品的种类为 n 种，每个物品 i 具有重量 c_i，价值为 v_i.

例 11.2c 假设有资金 25 可以投资于三个项目中，这三个项目的成本和回报列于下表中：

项目	每份的成本	每份的回报
1	5	7
2	9	12
3	15	22

220

那么，

$$\begin{aligned}
&V(x) = 0, \quad x \leqslant 4,\\
&V(x) = 7, \quad i(x) = 1, \quad x = 5,6,7,8,\\
&V(9) = \max\{7 + V(4), 12 + V(0)\} = 12, \quad i(9) = 2,\\
&V(x) = \max\{7 + V(x-5), 12 + V(x-9)\} = 14,\\
&\qquad\qquad i(x) = 1, \quad x = 10,11,12,13,\\
&V(14) = \max\{7 + V(9), 12 + V(5)\} = 19, \quad i(x) = 1 \text{ or } 2,\\
&V(15) = \max\{7 + V(10), 12 + V(6), 22 + V(0)\} = 22, \quad i(15) = 3,\\
&V(16) = \max\{7 + V(11), 12 + V(7), 22 + V(1)\} = 22, \quad i(16) = 3,\\
&V(17) = \max\{7 + V(12), 12 + V(8), 22 + V(2)\} = 22, \quad i(17) = 3,\\
&V(18) = \max\{7 + V(13), 12 + V(9), 22 + V(3)\} = 24, \quad i(18) = 2,
\end{aligned}$$

等等．举个例子，对于资金 18，最佳的投资策略是首先购买一份项目 $i(18)=2$，然后购买一份项目 $i(9)=2$．这就是说，如果有资金 18，那么最佳的投资是购买两份项目 2，可以得到的回报总额为 24. □

11.3 概率最优化模型

在本节中，考虑两个具有随机性的最优化问题．11.3.1 节讨论了一个赌博

模型，它曾被用来解释信息的价值. 11.3.2 节讨论当投资的机会数具有随机性时的投资分配问题.

11.3.1 具有不确定获胜概率的赌博模型

在例 9.2a 中，假设一项投资赚钱的概率 p 是不固定的，它可以取以下三个值之一：$p_1=0.45$，$p_2=0.55$，$p_3=0.65$. 并且假设，p 将以 1/4 的概率取 p_1，以 1/2 的概率取 p_2，以 1/4 的概率取 p_3. 如果一个投资者没有关于到底取哪一个 p_i 的信息，那么他将把投资中赚钱的概率取为

$$p=\frac{1}{4}p_1+\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{4}p_3=0.55.$$

221

假定存在一个对数效用函数(如同在例 9.2a 中那样)，那么从该例子的结果可知，投资者将投资他全部财富的 $100(2p-1)=10\%$，而他最终财富的期望效用为

$$\log(x)+0.55\log(1.1)+0.45\log(0.9)=\log(x)+0.0050=\log(e^{0.0050}x),$$

其中，x 是投资者的初始财富.

现在假设投资者在进行投资之前，已经知道哪一个 p_i 是赚钱的概率. 如果 0.45 是该概率，那么投资者将不会投资，所以他的最终财富的条件期望效用为 $\log(x)$. 如果 0.55 是赚钱概率，那么投资者将像前面所说的那样进行投资，而他最终财富的条件期望效用为 $\log(x)+0.0050$. 最后，如果 0.65 是赚钱概率，那么投资者将会投资他全部财富的 30%，而他的最终财富的条件期望效用为

$$\log(x)+0.65\log(1.3)+0.35\log(0.7)=\log(x)+0.0456.$$

因此，在投资前可以得到获胜概率 p_i 信息的投资者的最终期望效用为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\log(x)+\frac{1}{2}(\log(x)+0.0050)+\frac{1}{4}(\log(x)+0.0456)\\&=\log(x)+0.0139=\log(e^{0.0139}x).\end{aligned}$$

11.3.2 投资分配模型

一个投资者可以用来投资的资金为 D. 设在 N 个时刻中的每一时刻出现投资机会的概率均为 p，并且这些投资机会之间是相互独立的. 如果出现投资机会，投资者必须立即决定从他的剩余财富中拿出多少用于投资. 如果在一个机会中投资了 y，那么在该期末可获得回报 $R(y)$，这里 $R(y)$是 y 的某个特定函数. 假定所投资的金额和从中所得到的回报都不能再用于以后的投资，需要讨论的问题就是要确定到底在每一个投资机会中投资多少，才可以使得投资者最终财富的期望价值达到最大. 投资者的最终财富是所有的投资回报加上未用于投资的那部分金额.

为了解决这个问题，令 $W_n(x)$表示当投资者可用来投资的资金为 x，并且有

n 个投资机会时，可以得到的最大期望最终财富. 令 $V_n(x)$ 表示当投资者具有资金 x 可以用来投资，有 n 个投资时刻，并且眼前正好有一个机会时，可以得到的最大期望最终财富. 为了确定关于 $V_n(x)$ 的方程，注意到，如果一开始投资了 y，那么投资者的最大期望最终财富等于 $R(y)$，加上其在具有投资资金 $x-y$ 且有 $n-1$ 个投资时刻的投资中可以得到的最大期望值. 因为后者是 $W_{n-1}(x-y)$，所以当初始投资是 y 时，最大期望最终财富是 $R(y)+W_{n-1}(x-y)$. 投资者可以选择 y 的值使得这个和最大，因此得到下面的公式： 222

$$V_n(x) = \max_{0\leqslant y\leqslant x}\{R(y)+W_{n-1}(x-y)\}. \tag{11-5}$$

当投资者有 x 可用来投资，并且前面还具有 n 个时刻的情况下，要么出现一个机会，最大期望最终财富为 $V_n(x)$；要么机会并没有出现，而最大期望最终财富为 $W_{n-1}(x)$. 因为每一个机会都以概率 p 出现，由此可以得到

$$W_n(x) = pV_n(x)+(1-p)W_{n-1}(x). \tag{11-6}$$

取 $W_0(x)=x$ 作为开始，对于所有的 $0\leqslant x\leqslant D$，首先利用式(11-5)得到 $V_1(x)$，并利用式(11-6)得到 $W_1(x)$，然后再利用式(11-5)得到 $V_2(x)$，再利用式(11-6)得到 $W_2(x)$，依此类推. 如果我们令 $y_n(x)$ 表示使得等式(11-5)的右侧最大的 y 值，那么如果还剩下 n 个时刻，现在正好有一个投资机会，并且当前的投资资金是 x 时，最优的投资策略就是投资 $y_n(x)$.

例 11.3a 假设有金额 10 可用于投资，存在两个时刻，投资机会在每个时刻都可能以概率 $p=0.7$ 出现，并且

$$R(y) = y+10\sqrt{y}.$$

找出最大期望最终财富和最优投资策略. 223

解：从 $W_0(x)=x$ 开始，式(11-5)给出

$$\begin{aligned}V_1(x) &= \max_{0\leqslant y\leqslant x}\{y+10\sqrt{y}+x-y\}\\ &= x+\max_{0\leqslant y\leqslant x}\{10\sqrt{y}\}\\ &= x+10\sqrt{x}\end{aligned}$$

和 $y_1(x)=x$. 于是，

$$W_1(x) = 0.7(x+10\sqrt{x})+0.3x = x+7\sqrt{x},$$

由此得出

$$\begin{aligned}V_2(x) &= \max_{0\leqslant y\leqslant x}\{y+10\sqrt{y}+x-y+7\sqrt{x-y}\}\\ &= x+\max_{0\leqslant y\leqslant x}\{10\sqrt{y}+7\sqrt{x-y}\}\\ &= x+\sqrt{149x},\end{aligned} \tag{11-7}$$

上面最后的等式以及下面的结果可通过简单的微积分计算获得：

$$y_2(x) = \frac{100}{149}x. \tag{11-8}$$

由前述结果得

$$W_2(x) = 0.7(x + \sqrt{149x}) + 0.3(x + 7\sqrt{x}) = x + 0.7\sqrt{149x} + 2.1\sqrt{x}.$$

于是，若以 10 作为初始投资，最大期望最终财富为

$$W_2(10) = 10 + 0.7\sqrt{1490} + 2.1\sqrt{10} = 43.66.$$

因此，最优投资策略是：如果在一开始出现投资机会，投资 1 000/149＝6.71；当在最后一刻又出现投资机会时，就再投资所剩的全部金额. □

如果 $R(y)$是非减的凹函数，那么可以得出下面的结论.

定理 11.3.1 如果 $R(y)$是非减的凹函数，那么

a) $V_n(x)$和 $W_n(x)$都是非减的凹函数；

224

b) $y_n(x)$是关于 x 的非减函数；

c) $x-y_n(x)$是关于 x 的非减函数；

d) $y_n(x)$是关于 n 的非增函数.

b)和 c)的含义分别是，财富越多，用于投资的金额就应该越多，保留的财富也应越多. d)的含义是，投资次数越多，每次投资的数额应该越少.

11.4 习题

练习 11.1 有金额为 6 的资金可投资于两个项目中，每个项目的回报函数如下：

$$f_1(x) = 2\log(x+1), \quad f_2(x) = \sqrt{x}, \quad x = 0,1,\cdots.$$

找出最优投资策略.

练习 11.2 在例 11.2a 中，当投资金额为 8 时，找出最优投资策略和最大回报. 请使用例 11.2a 中的方法.

练习 11.3 使用例 11.2b 中的方法求解上一题.

练习 11.4 函数 $g(i)$，$i=0$，1，…，称为是凸的，如果

$$g(i+1) - g(i) \text{ 关于 } i \text{ 是非减的}$$

请证明，如果所有的回报函数都是凸的，那么 11.2 节中的问题存在最优投资策略，即将全部资金投资于一个项目中.

练习 11.5 选择非负的整数 x_1，…，x_n，它们的和为 $m=kn$，使得下式最大化：

$$f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

其中，$f(x)$是一个给定的函数，$f(0)=0$.

a)如果 $f(x)$是凹的，请证明最大值为 $nf(k)$.

b)如果 $f(x)$是凸的，请证明最大值为 $f(kn)$. [225]

练习 11.6 继续完成例 11.2c，并找出当投资金额为 25 时的最优投资策略.

练习 11.7 从一定的初始财富开始，要求必须在随后的 N 个时期中，确定每个时期的投资数额和消费数额. 假定在一个时期中消费 x 所能得到的效用为 $\sqrt{x}$，目标是使得在这 N 个时间段中所得到的效用总和达到最大. 每期投资可以得到固定比例 r 的回报. 当目前的财产为 x，还剩余 n 个时间段时，可以得到的最大效用之和用 $V_n(x)$表示.

a)$V_1(x)$的值为多少？

b)找出 $V_2(x)$.

c)导出关于 $V_n(x)$的等式.

d)当目前的财产为 x，并且还剩余 n 个时间段时，最佳的投资额和消费额为多少？

提示：从消费额着手.

练习 11.8 工人在时刻 0 开始处理 n 个工作. 工作 i 的处理时间为 x_i. 如果在时刻 t，完成工作 i，那么该工人可以得到回报 $R_i(t)$. 工作可以按任何顺序处理，其目的是使工人得到的回报最大化. 对于这些工作的任何一部分 S，令$V(S)$表示当所有与 S 无关的工作都已处理完毕时，完成工作 S 所带来的最大回报. 例如，$V(\{1,2,\cdots,n\})$即为可以得到的最大回报.

a)导出关于 $V(S)$的一个方程，将 $V(S)$与从 S 的不同子集而计算出的 V 值联系起来.

b)请解释如何利用 a)中结果来寻找最优策略.

练习 11.9 投资者必须在两个可能的投资中作出选择. 在第一个投资中，必须冒险决定投资数额，并且会以 0.6 的概率赢得这些数额或者以 0.4 的概率失掉它. 在第二个投资中，赢的概率是 70%的可能性为 0.4，是 30%的可能性为 0.8. 虽然投资者在了解到第二个投资的获胜概率之前就必须作出投资决定，但是如果一旦选择了第二个投资，在决定投资数额之前，她就可以知道获胜概率. 如果具有对数效用函数，她应该选择哪一个投资，而投资的数额又应该为多少？ [226]

练习 11.10 证明式(11-7)和式(11-8).

练习 11.11 考虑一个节点为 1，2，…，m，边为$(i,j)(i\neq j)$的图. 设运行在边(i,j)上的时间与什么时候开始在这条边上运行有关. 用 $t_s(i,j)$表示在 s 时刻离开 i 的条件下在(i,j)上运行的时间. 一个有趣的问题是找出在时刻 0 从节点 1 出发，最终到达节点 m 的最小时间. 例如：如果所走的路径为 $1, i_1, i_2, \cdots, i_k=m$，那么，到达 m 的时间为 $a_1+a_2+\cdots+a_k$，其中，

$$a_1 = t_0(1,i_1),$$

$$a_2 = t_{a_1}(i_1, i_2),$$
$$a_3 = t_{a_1+a_2}(i_2, i_3),$$
$$\vdots$$
$$a_k = t_{a_1+\cdots+a_{k-1}}(i_{k-1}, i_k).$$

设 $T(j)$表示在时刻 0 从节点 1 出发，最终到达节点 j 的最小时间，证明

$$T(j) = \min_i \{T(i) + t_{T(i)}(i,j)\},$$

其中假定 $s+t_s(i, j)$关于 s 是递增的，即在 s 时刻到达 i，然后直接去 j 所花的时间关于 s 是递增的.

227

第 12 章　随机动态规划

12.1　随机动态规划问题

在一般的动态规划问题中，总是假定系统在每一阶段的初始时刻被观测，且其状态是确定的. 设$\mathcal{S}$表示所有可能的状态的集合，在得到状态的信息后，必须选择一个决策. 如果状态为 x，选择的决策为 a，那么

a)对应的回报为 $r(x, a)$；

b)下一状态，记为 $Y(x, a)$，是一个随机变量，其分布仅依赖于 x 和 a.

假设目标是使 N 阶段上所有回报的期望值最大化. 为了实现这个目标，用 $V_n(x)$表示在当前状态为 x 时，后面 n 阶段回报的期望和的最大值. 如果当前阶段选择的决策为 a，记当前阶段的期望回报为 $r(x, a)$，下一阶段的状态为 $Y(x, a)$. 如果 $Y(x, a)=y$，则余下的 $n-1$ 阶段的期望回报的最大值为 $V_{n-1}(y)$. 所以在当前状态为 x，当前阶段选择的决策为 a 的假定下，后面 n 阶段期望回报的最大值满足

$$r(x,a)+E[V_{n-1}(Y(x,a))].$$

也即，其后 n 阶段的最大期望回报 $V_n(x)$满足

$$V_n(x)=\max_a\{r(x,a)+E[V_{n-1}(Y(x,a))]\}. \tag{12-1}$$

上面的公式可用递推方法求解：从 $V_0(x)=0$ 可解得 $V_1(x)$，由 $V_1(x)$可推出 $V_2(x)$，重复下去，直到推得 $V_N(x)$. 这种已知当前状态为 x，其后分为 n 个阶段，选择使式(12-1)右边达到最大的决策(或决策之一)的策略称为最优策略. 即对所有 n 与 x，设 $a_n(x)$是使

228

$$r(x,a)+E[V_{n-1}(Y(x,a))]$$

达到最大的决策，记为

$$a_n(x)=\arg\max_a\{r(x,a)+E[V_{n-1}(Y(x,a))]\},\quad n=1,\cdots,N,$$

那么，选择使当前状态为 x，其后分为 n 阶段的决策 $a_n(x)$的策略是一种最优策略.

称函数 $V_n(x)$为最优值函数，公式(12-1)为最优化公式.

当$\mathcal{S}$为整数集的子集时，用 $P_{i,a}(j)$表示当前状态为 i，选择的决策为 a 时，下一状态为 j 的概率. 此时，最优化公式可表示为

$$V_n(i)=\max_a\left\{r(i,a)+\sum_j P_{i,a}(j)V_{n-1}(j)\right\}.$$

当$\mathcal{S}$为一个连续集合时，用 $f_{x,a}(y)$表示当前状态为 x，选择的决策为 a 时，下一

状态为 y 的概率. 此时，最优化公式可表示为

$$V_n(x)=\max_a\left\{r(x,a)+\int f_{x,a}(y)V_{n-1}(y)\mathrm{d}y\right\}.$$

在一些问题中，未来成本可能被贴现. 如果未来第 k 期的成本被因子 β^k 贴现，则最优化公式可化为

$$V_n(x)=\max_a\{r(x,a)+\beta E[V_{n-1}(Y(x,a))]\}.$$

例如，如果想要各阶段回报和的现值达到最大，就要取 $\beta=\frac{1}{1+r}$，其中 r 表示每阶段的利率. 称 β 为贴现因子，一般情况下，总是假定 $0\leqslant\beta\leqslant1$.

例 12.1a(看涨期权的最优回报) 对一个随离散时间变化的证券价格模型，229 假定证券下一期的价格等于当前期的价格乘上一个随机变量 Y，且每期的利率为 $r>0$. 设 $\beta=\frac{1}{1-r}$，要确定执行价为 K，到期时间为 n 的美式看涨期权的适当值. 因为没有假定 Y 只取两个可能值，所以没有一个唯一的风险中性概率法则，因而从套利的角度考虑是不能确定该期权的价格的. 因为假定证券不能以低于市场价出售，故提前执行不再是套利的理由. 为了确定这种期权的合适价格，作如下假定：以后各期的 Y 是独立同分布的. 下面通过如下方式来确定该期权的价格——从该期权中得到的回报的期望现值达到最大.

转化为动态规划问题，系统的状态为期权的当前价格；距到期日还有 j 期，证券当前价格为 x 的期权的最优值函数 $V_j(x)$等于从该期权中得到的回报的期望现值的最大值. 在上面的假定下，如果期权被执行，则回报为 $x-K$；如果期权没有执行，则回报的期望现值的最大值为 $E[\beta V_{j-1}(xY)]$. 要从这两种不同可能决策中获得最好的结果，最优化公式应为

$$V_j(x)=\max\{x-K,\beta E[V_{j-1}(xY)]\}$$

且有边界条件

$$V_0(x)=(x-K)^+=\max\{x-K,0\}.$$

对当前价格为 x，距到期日还有 j 期的这种期权，为确定其定价，下列策略为最优策略：如果 $V_j(x)=x-K$，则执行，如果 $V_j(x)>x-K$，则不执行. (即当前价为 x 的该期权的最优策略在距到期日还有 j 期时执行的充要条件为 $V_j(x)=x-K$.) □

下面进一步讨论最优策略的细节. 特别地，将证明：如果 $E[Y]\geqslant1+r$，则看涨期权不提前执行；如果 $E[Y]<1+r$，则存在一个非减的数列 $\{x_j\}(j\geqslant0)$，使在距到期日还有 j 期的时候只要证券价格低于 x_j 就执行期权的策略是一种最优策略. 为了证明这些结论，需要下列预备结果. 230

引理 12.1.1 *如果 $E[Y]\geqslant1+r$，那么，在证券价格高于执行价 K，且已经*

是到期日的情况下执行期权是一种最优策略.

证明：由最优化公式知 $V_j(x) \geqslant x-K$. 又因为 $\beta E[Y] \geqslant \beta(1+r)=1$，所以对所有 $j \geqslant 1$，有

$$\beta E[V_{j-1}(xY)] \geqslant \beta E[xY-K] \geqslant x-\beta K > x-K.$$

从而，提前执行期权不是最优策略. □

引理 12.1.2 如果 $E[Y]<1+r$，那么，$V_j(x)-x$ 是 x 的减函数.

证明：对 j 使用数学归纳法证明. 因为 $V_0(x)-x=\max\{-K, -x\}$，所以当 $j=0$ 时结论成立.

假设 $j-1$ 时结论成立，即 $V_{j-1}(x)-x$ 是 x 的减函数. 下面证明结论对 j 也成立. 因为

$$\begin{aligned}V_j(x)-x &= \max\{-K, \beta E[V_{j-1}(xY)]-x\} \\ &= \max\{-K, \beta(E[V_{j-1}(xY)-xE[Y]])+\beta xE[Y]-x\} \\ &= \max\{-K, \beta E[V_{j-1}(xY)-xY]+x(\beta E[Y]-1)\},\end{aligned}$$

由归纳假设知，对 Y 的任一取值，$V_{j-1}(xY)-xY$ 关于 x 是递减的，所以 $E[V_{j-1}(xY)-xY]$ 也是 x 的减函数. 又因为 $\beta E[Y]<1$，所以 $x(\beta E[Y]-1)$ 是关于 x 的减函数. 故 $\beta E[V_{j-1}(xY)-xY]+x(\beta E[Y]-1)$ 也是关于 x 的减函数，即 $V_j(x)-x$ 是 x 的减函数. □

命题 12.1.1 如果 $E[Y]<1+r$，则存在一个递增的数列 $\{x_j\}(j \geqslant 0)$，使在距到期日还有 j 期时只要证券价格不低于 x_j 就执行期权的策略是一种最优策略.

证明：设 $x_j=\min\{x: V_j(x)=x-K\}$ 是使在距到期日还有 j 期时执行期权是最优策略的证券价格的最小值. 由引理 12.1.2 知，对 $x'>x_j$ 有

$$V_j(x')-x' \leqslant V_j(x_j)-x_j=-K. \quad \boxed{231}$$

由最优化公式知 $V_j(x') \geqslant x'-K$，所以

$$V_j(x')=x'-K.$$

因此，在距到期日还有 j 期且当前价格为 x' 时执行期权是最优策略的充分必要条件是 $x' \geqslant x_j$.

下面证明 x_j 关于 j 是递增的. 事实上，因为在到期日之前执行期权不减少最大期望回报，所以

$$V_{j-1}(x_j) \leqslant V_j(x_j)=x_j-K.$$

又由最优化公式知 $V_{j-1}(x_j) \geqslant x_j-K$，所以

$$V_{j-1}(x_j)=x_j-K.$$

因为 x_j-1 是使 $V_{j-1}(x)=x-K$ 成立的最小 x，所以有 $x_{j-1} \leqslant x_j$，这就证明了所需结论. □

虽然假定了在状态 x，选择的决策为 a 时对应的回报 $r(x, a)$ 是一个常数，但在实际问题中，回报也可能是一个与之前发生的事件独立的随机变量，在这种变量下，$r(x, a)$ 应理解为期望回报.

例 12.1b 一个缸中开始有 n 个红球、m 个蓝球. 试验者每次从缸中随机地抽出一个球，如果抽到红球得 1 分，如果抽到蓝球得 -1 分，抽出的球不再放回，试验者随时可以选择停止试验. 要使试验者得分的期望值最大，可转化为动态规划问题来处理，其中，当前状态为缸中剩余的球. 令 $V(r, b)$ 表示目前缸中剩余 r 个红球、b 个蓝球的条件下得分的最大期望值. 因为在当前状态为 (r, b) 时，抽下一个球的得分为 $\frac{r}{r+b}-\frac{b}{r+b}=\frac{r-b}{r+b}$，且在下一次抽取后，如果抽到的是红球，则接下去再抽的最大期望得分为 $V(r-1, b)$，如果抽到的是蓝球，则接下去再抽的最大期望得分为 $V(r, b-1)$，由此可看出，最优化公式为

232

$$V(r,b)=\max\left\{0,\frac{r-b}{r+b}+\frac{r}{r+b}V(r-1,b)+\frac{b}{r+b}V(r,b-1)\right\}.$$

从 $V(r, 0)=r$，$V(0, b)=0$ 开始，$V(n, m)$ 可由上述最优化公式递推求得. □

例 12.1c 假定某人进行 n 次赌博，每次可选择总量为 s 的赌注，其中 s 是小于或等于此人当前财富的任意非负数. 每次赌博的回报为 sY，其中，Y 是一个分布已知的非负随机变量. 要使 n 次赌博之后最终财富的对数的期望值最大，确定最优策略.

解： 转化为动态规划问题，当前状态为此人财富的现值. 用 $V_n(x)$ 表示当前财富为 x，再进行 n 次赌博后最终财富的对数的最大期望值，决策是确定每次赌注占当前财富的份额. 在下一次赌博后，如果赌注为 αx，则财富总值为 $\alpha xY+x-\alpha x=x(\alpha Y+1-\alpha)$. 所以，最优化公式为

$$V_n(x)=\max_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}E[V_{n-1}(x(\alpha Y+1-\alpha))].$$

由 $V_0(x)=\log(x)$ 得

$$\begin{aligned}V_1(x)&=\max_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}E[\log(x(\alpha Y+1-\alpha))]\\&=\log(x)+\max_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}E[\log(\alpha Y+1-\alpha)]\\&=\log(x)+C,\end{aligned}$$

其中，

$$C=\max_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}E[\log(\alpha Y+1-\alpha)].$$

用

$$\alpha^*=\arg\max_{\alpha}E[\log(\alpha Y+1-\alpha)]$$

表示使 $E[\log(\alpha Y+1-\alpha)]$ 达到最大的 α 值，则当只有一次赌博时，如果当前财富为 x，最优策略是所下的赌注为 $\alpha^* x$.

233

如果当前财富为 x，且余下两次赌博，则最终财富的对数的最大期望值为

$$\begin{aligned} V_2(x) &= \max_{0\leqslant\alpha\leqslant1} E[V_1(x(\alpha Y+1-\alpha))] \\ &= \max_{0\leqslant\alpha\leqslant1} E[\log(x(\alpha Y+1-\alpha))+C] \\ &= \log(x)+C+\max_{0\leqslant\alpha\leqslant1} E[\log(\alpha Y+1-\alpha)] \\ &= \log(x)+2C, \end{aligned}$$

所以每次选择赌注为总财富的 α^* 倍仍是最优策略. 由数学归纳法知

$$V_n(x)=\log(x)+nC,$$

从而得到无论进行多少次赌博，每次选择当前财富的 α^* 倍为赌注是最优策略. □

12.2 无限时间上的模型

人们通常对目标为最大化未来无限时间上总回报的期望值这类随机动态规划问题有兴趣. 即人们对下列问题是有兴趣的：从 0 时刻开始，设在 n 时刻的状态为 X_n，在 n 时刻的决策为 A_n，要选择的策略为 π，目标是最大化

$$V_\pi(x)=E_\pi\left[\sum_{n=0}^{\infty} r(X_n,A_n)\,|\,X_0=x\right],$$

其中，策略 π 表示选择的行动方式，E_π 表示已选择策略为 π 的条件下的期望值. 上式是求一个无穷多项和的期望，它可能没有意义或不是有限的，在后面涉及的问题中总是假定它是有意义且有限的. 例如，如果假定一阶段回报 $r(x,a)$ 是有界的，不妨设 $|r(x,a)|<M$， 贴现因子为 $\beta(0\leqslant\beta<1)$，那么，策略 π 对应的总贴现成本的期望值有限，且界为 $\frac{M}{1-\beta}$.

234

如果记

$$V(x)=\max_\pi V_\pi(x),$$

那么，$V(x)$ 是最优值函数，且它满足最优化公式

$$V(x)=\max_a\{r(x,a)+E[V(Y(x,a))]\}.$$

例 12.2a(最优资产销售问题) 如果你每天收到一份你所出售资产的报价，当报价到达时，你必须先付 $c>0$ 的成本，然后再决定是接受或拒绝该报价. 设每天的报价是相互独立的，且对 $j\geqslant0$，$p_j=P$(报价为 j). 现要确定使纯收益的期望最大的策略. 转化为动态规划问题，状态为当天报价，用 $V(i)$ 表示当天收到的报价是 i 的条件下最优决策对应的纯收益. 如果当天接受了该报价，则你的纯收益为 $-c+i$. 否则，你必须先付 c 的成本，再考虑下一次报价. 如

果下一次报价是 j，那么最大期望收益是 $V(j)$. 因为下一次报价为 j 的概率为 p_j，所以在报价 i 被拒绝的条件下，最优决策对应的纯收益为 $-c+\sum_j p_j V(j)$. 显然纯收益期望的较大值是两种情况下最大值中较大的那个，于是最优化公式为

$$V(i)=\max\left\{-c+i,-c+\sum_j p_j V(j)\right\}.$$

记 $v=\sum_j p_j V(j)$，那么

$$V(i)=-c+\max\{i,v\}.$$

从上式可看出，要接受报价 i，当且仅当 $i\geqslant v$. 为了求得 v，注意到

235

$$V(i)=\begin{cases}-c+v & \text{如果 } i\leqslant v,\\ -c+i & \text{如果 } i>v,\end{cases}$$

因此，

$$\begin{aligned}v&=\sum_i p_i v(i)\\ &=-c+\sum_{i\leqslant v} v p_i+\sum_{i>v} i p_i.\end{aligned}$$

由 $\sum_i p_i=1$，上面的公式化为

$$v\sum_{i>v} p_i=-c+\sum_{i>v} i p_i$$

或

$$\sum_{i>v}(i-v)p_i=c,$$

即

$$c=\sum_i (i-v)^+\ p_i.$$

所以，当用 X 表示报价的随机变量时，上式的公式等价于

$$c=E[(X-v)^+] \tag{12-2}$$

即 v 是使 $E[(X-v)^+]$等于 c 的值(在大多数情况下，v 是一个确定的量). 最优策略是当首次报价不低于 v 时接受报价. 又因为 $v=\sum_i p_i V(i)$，所以，在首次报价收到前，纯收益的期望最大值是 v. □

在大多数情况下，比如贴现因子及回报是有界的，无限时间上的动态规划问题中的最优值函数 $V(x)$是 n 阶段最优值函数的极限，即

$$V(x)=\lim_{n\to\infty} V_n(x).$$

这个关系式通常用来按下列方式证明最优值函数的某些性质：首先用数学归纳法证明该性质对 n 阶段最优回报成立，然后对 n 求极限. 下面用一个例子来说明这一点. [236]

例 12.2b（机器更换模型） 设在每阶段的开始，机器处于状态 $i(i=1, 2, \cdots, M)$待评估. 评估后有两种选择：一种是支付 R 的费用更换一台新机器，新机器的状态为 0；另一种是不更换机器，这样机器将以 $P_{i,j}$ 的概率进入状态 j. 假定机器在状态 i 时的评估费为 $C(i)$，且存在贴现因子 $\beta(0<\beta<1)$，目标是最小化无限时间上的期望贴现成本.

用 $V(i)$表示机器处于状态 i 时的最小期望贴现成本. 那么，最优化公式为

$$V(i) = C(i) + \min\left\{R + \beta V(0), \beta \sum_j P_{i,j} V(j)\right\}.$$

这是由于：如果更换一台新机器，那么，评估与更换的成本为 $C(i)+R$，新机器处于状态 0，它的最小期望成本为 $\beta V(0)$；如果不更换机器，那么，评估成本为 $C(i)$，下一状态是 j 时的最小期望成本为 $\beta V(j)$. 所以，更换机器条件下的最小期望成本为

$$C(i) + \beta \sum_j P_{i,j} V(j).$$

此外，当且仅当

$$\beta \sum_j P_{i,j} V(j) \geqslant R + \beta V(0)$$

时选择更换机器的策略是最优策略. □

如果想确定使 $V(i)$关于 i 递增的条件，一些人很容易想到的条件是假定评估成本 $C(i)$关于 i 递增，所以有下面的假定.

假定 1 对所有 $i \geqslant 0$，有 $C(i+1) \geqslant C(i)$.

虽然一些人认为假定 1 很容易想到，但是，实际上它并不能推出 $V(i)$关于 i 是递增的结论. 例如，假定 $C(10)<C(11)$，有可能状态 11 比状态 10 更可取，因为虽然状态 11 比状态 10 有更多的评估成本，但是它有可能进入一个更好的状态. 为了排除这种情况，再假定：$N(i)$（在当前状态为 i 且不更换机器时的下一状态）关于 i 是随机增加的. [237]

假定 2 对所有 $i \geqslant 0$，$N_{i+1} \geqslant_{st} N_i$.

其中，$N_{i+1} \geqslant_{st} N_i$ 表示：对所有 k，$P(N_{i+1} \geqslant k) \geqslant P(N_i \geqslant k)$均成立$\left(\text{也可记为对所有 } k, \sum_{j \geqslant k} P_{i+1,j} \geqslant \sum_{j \geqslant k} P_{i,j} \text{ 均成立}\right)$. 由 10.1 节的命题 10.1.1 知假定 2 等价于

对任一增函数 h，$E[h(N_i)]$关于 i 是递增的.

现引入下列定理.

定理 12.2.1 在假定 1 与假定 2 的条件下，

a) $V(i)$ 关于 i 是递增的.

b) 对某个 $0 \leqslant i* \leqslant \infty$，当且仅当 $i \geqslant i*$ 时在状态 i 更换机器是最优策略.

证明：用 $V_n(i)$ 表示机器处于状态 i 时未来 n 阶段上的最小期望贴现成本. 则

$$V_n(i) = C(i) + \min\left\{R + \beta V_{n-1}(0), \beta\sum_j P_{i,j}V_{n-1}(j)\right\}, \quad n \geqslant 1. \quad (12\text{-}3)$$

下面用数学归纳法证明：对所有 n，$V_n(i)$ 关于 i 是递增的.

因为 $V_1(i)=C(i)$，由假定 1 知结论当 $n=1$ 成立.

假设 $V_{n-1}(i)$ 关于 i 是递增的. 由归纳假设及假定 2 知 $E[V_{n-1}(N_i)]$ 关于 i 是递增的. 又因为

$$E[V_{n-1}(N_i)] = \sum_j P_{i,j}V_{n-1}(j),$$

所以，由式(12-3)及假定 1 知 $V_n(i)$ 关于 i 是递增的. 由归纳原理知：对所有 n，$V_n(i)$ 关于 i 是递增的.

238 再由 $V(i)=\lim\limits_{n\to\infty}V_n(i)$ 得到 $V(i)$ 关于 i 是递增的.

最后证明结论 b)成立. 当且仅当

$$\beta\sum_j P_{i,j}V(j) \geqslant R + \beta V(0)$$

时在状态 i 更换机器是最优策略，而上式又可表示为

$$E[V(N_i)] \geqslant \frac{R + \beta V(0)}{\beta}.$$

另一方面，由结论 a)及假定 2 知 $E[V(N_i)]$ 关于 i 是递增的，如果记

$$i* = \min\left\{i: E[V(N_i) \geqslant \frac{R + \beta V(0)}{\beta}\right\},$$

则得到 $E[V(N_i)] \geqslant \dfrac{R+\beta V(0)}{\beta}$ 当且仅当 $i \geqslant i^*$. □

12.3 最优停止问题

最优停止问题是两决策问题. 设当前状态为 x，面临两种选择：一种是支付 $c(x)$ 的费用进入下一状态 $Y(x)$，其中 $Y(x)$ 是分布仅依赖于 x 的随机变量；另一种是停止，这样可得最终回报 $r(x)$. 用 $V(x)$ 表示当前状态为 x，其后净增加的最大期望回报，则最优化公式为

$$V(x) = \max\{r(x), -c(x) + E[V(Y(x))]\}.$$

如果状态空间是整数集，且 $P_{i,j}$ 表示从状态 i 进入状态 j 的概率，那么当在状态 i 选择不停止时，上面的公式可写为

$$V(i) = \max\left\{r(i), -c(i) + \sum_j P_{i,j}V(j)\right\}.$$

用 $V_n(i)$ 表示当前状态为 i，最多只有 n 阶段的动态规划问题净增加的最大期望回报，则由常规的方法有

$$V_0(i) = r(i)$$

239

且

$$V_n(i) = \max\left\{r(i), -c(i) + \sum_j P_{i,j}V_{n-1}(j)\right\}$$

因为有停止之前最多只剩 n 阶段的限制，所以 $V_n(i)$ 关于 n 是递增的，且有 $V_n(i) \leqslant V(i)$.

定义 如果 $\lim_{n\to\infty} V_n(i) = V(i)$，则称停止问题是稳定的.

虽然不是全部，但是大多数情况下，影响停止法则的就是稳定性. 停止问题稳定的充分条件是：存在常数 $c>0$ 及 $r<\infty$，使得对所有 x 均有

$$c(x) > c \text{ 且 } r(x) < r.$$

在最优停止问题中，通常有较好结果的一种策略是一阶前向策略，在这种策略中，如果在状态 i 停止获得的回报不低于进入下一状态后再停止所获得的期望回报，则停止在状态 i. 即如果用

$$B = \left\{i : r(i) \geqslant -c(i) + \sum_j P_{i,j}r(j)\right\}$$

表示立即停止(最终回报为 $r(i)$)不比让状态进入下一状态然后停止(期望净增回报为 $-c(i) + \sum_j P_{i,j}r(j)$)差的所有状态的集合，那么，一阶前向策略是这样一种策略：如果当前状态 i 属于 B 则停止，否则继续.

下面将证明：一个稳定的停止问题，如果集合 B 是闭集(即如果当前状态属于 B，当选择继续时，下一状态必然属于 B)，那么，一阶前向策略是最优策略.

定理 12.3.1 如果停止问题是稳定的，且当 $i\in B$，$j\notin B$ 时，$P_{i,j}=0$ 成立，那么，一阶前向策略是最优策略.

240

证明： 首先注意到，如果 $i\notin B$，在 i 停止不是最优的，因为让状态进入下一阶段再停止是更好的. 所以要证明定理 12.3.1，仅需证明当 $i\in B$ 时，在 i 停止是最优的. 即证明

$$V(i) = r(i), i \in B. \tag{12-4}$$

为了证明式(12-4)，用数学归纳法先证明对所有 n，$V_n(i)=r(i)$，$\forall i\in B$ 成立.

事实上，因为 $V_0(i)=r(i)$，$\forall i\in B$，所以当 $n=0$ 时结论成立.

假设 $V_{n-1}(i)=r(i)$，$\forall i\in B$，那么，当 $i\in B$ 时，

$$V_n(i) = \max\left\{r(i), -c(i) + \sum_j P_{i,j}V_{n-1}(j)\right\}$$

$$= \max\left\{r(i), -c(i) + \sum_{j\in B} P_{i,j}V_{n-1}(j)\right\}（因为 B 是闭的）$$

$$= \max\left\{r(i), -c(i) + \sum_{j\in B} P_{i,j}r(j)\right\}（由归纳假设）$$

$$= r(i),$$

其中最后一个等式是由于 $i\in B$. 因此，对任意 $i\in B$，均有 $V_n(i)=r(i)$，由稳定性知式(12-4)成立. 定理得证. □

例 12.3a 一个窃贼，他的盗窃行动成功的概率为 p，如果成功了，他盗得赃物量为 $j(j=0, 1, \cdots, m)$的概率为 p_j. 如果失败了，窃贼被抓，他将失去他前面累积的所有财物，问题终止. 窃贼问题是决定进行下一次盗窃，或洗手不干去享用已有的赃物，找出最优策略.

解：设状态为迄今为止所盗赃物的总量. 如果当前赃物总量为 i，且窃贼决定停止行窃，那么，问题的回报为 i，问题终止. 如果选择继续，成功后，新的状态将以概率 p_j 达到 $i+j$. 用 $V(i)$表示当前状态为 i 时，窃贼的最终最大期望回报. 则最优公式为

241

$$V(i) = \max\left\{i, p\sum_j p_j V(i+j)\right\}.$$

如果 $i\in B$，由一阶前向策略知应在状态 i 停止，其中，

$$B = \left\{i: i \geqslant p\sum_j p_j(i+j)\right\},$$

即如果用 $\mu = \sum_j jp_j$ 表示一次盗窃成功的期望回报，则

$$B = \{i: i \geqslant p(i+\mu)\} = \left\{i: i \geqslant \frac{p\mu}{1-p}\right\}.$$

因为状态不可能减少(除非窃贼被抓，那样就不必再决策了)，故 B 是闭的. 因此，当赃物总量达到或超过$\frac{p\mu}{1-p}$时停止的一阶前向策略是最优策略. □

一阶前向策略能使我们对例 12.2a 中资产销售的结果有更直观的了解.

例 12.3b 用 $E[X]$表示例 12.2a 中一个新的报价的期望，如果 $j\in B$，则由一阶前向策略，应该接受这个报价，其中，

$$B = \{j: j \geqslant -c + E[X]\}.$$

因为 B 不是状态的闭集(因为后面的报价不一定是增加的)，所以，一阶前向策略不一定是最优策略. 但是，如果修改规则，允许资产出售者回望过去的报价，即已被拒绝的报价有可能在未来任何时候被接受. 在这种情况下，该报价必是一个新的报价收到后，所有收到的报价中最大的一个报价. 现在，如果当前状态为 j，要在下一报价收到后停止，则售价为 $j+(X-j)^+$，其中 X 是下一阶段的报价. 因此，一阶前向策略停止状态的集合为

242

$$B = \{j : j \geqslant j + E[(X - j)^+] - c\} = \{j : E[(X - j)^+] \leqslant c\}.$$

因为 $E[(X-j)^+]$是 j 的减函数，又因为状态为迄今为止收到的最大报价不可能是减少的，所以 B 是状态的闭集. 因此，在回望问题中，一阶前向策略是最优策略. 记 v 为使 $E[(X-v)^+]=c$ 成立的量，则回望问题的一阶前向策略为：当报价不低于 v 时就接受该报价. 但是这种策略也可应用于非回望问题，它也是非回望问题的最优策略.（如果它不是非回望问题的最优策略，则意味着非回望问题的最大期望净回报严格大于回望问题的最大期望净回报，这显然是不可能的.） □

下一个例子给出了多人比赛中，关于其中两名选手对抗次数均值的一个有趣且令人惊讶的结果.

例 12.3c 考虑一个有 k 名选手参加的比赛，设选手 $i(i=1, \cdots, k)$有初始财富 $n_i>0$. 在每一阶段，选出两名选手进行比赛，每场比赛每个选手的胜率相同，规定败者付给胜者 1 单位财富. 当某选手财富为 0 时，自动出局. 直到某选手赢得所有财富 $\sum_{i=1}^{k} n_i$ 比赛才终止. 用 $N_{i,j}$表示两个指定选手 i 与 j 比赛的次数，本题讨论 $E[N_{i,j}]$.

为了得出选手 i 与 j 比赛的平均次数，按下列方式建立一个停止法则问题：选手 i 与 j 被选中比赛后(注：这里没有指定选择选手的方式)，如果选择停止则最终回报为选手 i 与 j 当前财富的乘积；如果选择继续则下一阶段 i 与 j 被选中比赛的话回报加 1，没被选中比赛回报加 0. 设 i 与 j 的当前财富分别为 n 与 m，那么，如果选择停止则最终财富为 nm；如果选择继续且在下一阶段停止，则下一阶段 i 与 j 没被选中比赛的最终回报为 nm(因为下一阶段最终回报增加 0)，下一阶段 i 与 j 被选中比赛的最终回报的期望为 243

$$1 + \frac{1}{2}(n+1)(m-1) + \frac{1}{2}(n-1)(m+1) = nm.$$

从而，不论哪一种情况，选择立即停止与选择进入下一阶段然后停止其最终回报是相同的. 所以一阶前向策略总是要求立即停止，且停止状态的集合是闭的，因而一阶前向策略是最优的. 又因为立即停止与选择进入下一阶段然后停止其最终回报是相同的，故总是选择继续也是最优策略. 因为选择总是继续的最终回报为 i 与 j 被选中比赛的总次数 $N_{i,j}$，而 $n_i n_j$ 是立即停止的回报，所以有 $E[N_{i,j}]=n_i n_j$. 非常有趣的是，从上述讨论还看出，无论用哪种方式选择比赛的选手，本题的结论都成立. □

12.4 习题

练习 12.1 给你一笔指定数目的美元，你需要去建造一批指定数量的工作机，每台机器的费用为整数，如果你的花费为 j，那么机器能正常工作的概率为

$p(j)$，$j=0$，1，…，且 $p(0)=0$. 全部机器将相继建成，当一台机器建成且能正常工作时，立即得到相应的回报. 用 $V_k(n)$表示你有 n 美元可用，能建造 k 台机器的最大概率.

a)推导出一个求 $V_k(n)$的公式.

b)求最优策略及求有 4 美元能造 2 台工作机的最大概率，其中，$p(1)=0.2$，244 $p(2)=0.4$，$p(3)=0.6$，$p(1)=1$.

练习 12.2 在例 12.1b 中，设缸中有 3 个红球、4 个蓝球，求最优策略及最优值.

练习 12.3 完成例 12.1c 中 $V_n(x)=\log(x)+nC$ 与最优策略是每次的赌注为当前总财富的 $\alpha *$ 倍的证明. 并证明当 $E[Y]\leqslant 1$ 时，$\alpha *=0$.

练习 12.4 求例 12.4 中有贴现因子 β 时的最优策略.

练习 12.5 在每一局赌博中，你或赢或输. 每局赌博前，你必须决定下多少赌注，赌注的多少决定你赢的概率. 如果你下的赌注为 x，那么你赢的概率为 $p(x)$，$p(x)$是增函数. 假定一局赌博中，你的赌注至少要是 1，并且在一轮赌博中你要赢 n 局才能离开.

用 V_k 表示在一轮赌博中你赢了 k 局的最小期望成本.

a)解释公式

$$V_k=\min_{x\geqslant 1}\{V_{k-1}+x+(1-p(x))V_k\}.$$

b)证明 $V_k(k\geqslant 1)$可由

$$V_1=\min_{x\geqslant 1}\frac{x}{p(x)}$$

$$V_k=\min_{x\geqslant 1}\frac{V_{k-1}+x}{p(x)},k=2,\cdots,n$$

递推确定.

c)就 $V_k(k\geqslant 1)$而言，最优策略是什么?

练习 12.6 在每一阶段，可以付成本 1 获得 1 张赠券，它等可能地是 n 种不同类型中的任何一种. 在当前阶段，如果选择停止，则最终回报为 jr，其中 r 为当前已收到赠券的种类. 例如，如果某人已获 6 张赠券，型号分别为 2，4，2，245 5，4，3，那么，他的净回报为 $4r-6$.

现目标是使净回报的期望达到最大，将这个问题化为动态规划问题：

a)状态与决策分别是什么?

b)定义最优值函数，给出最优化公式.

c)给出一阶前向策略.

d)一阶前向策略是最优策略吗? 请解释.

现假定每张赠券为型号 i 的概率是 p_i，满足 $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$.

e)给出这种情况下的状态.

f)给出一阶前向策略并说明它是不是一个最优策略.

练习 12.7 在例 12.1b 中，一阶前向策略是最优策略吗？如果不是，你认为它是一个好的策略吗？

参考文献

[1]Ross, S. M. (1983). *Introduction to Stochastic Dynamic Programming*, Academic Press. 246

第13章 奇异期权

13.1 引言

前面所讨论的期权有时也称为“香草”期权或标准期权，以区别于近年来飞速发展的更为复杂的期权——奇异期权(exotic option)．一般来说，这些奇异期权在执行时的价值不但依赖于当时标的证券的价格，还依赖于整个期权有效期内的历史证券价格．在本章中，将介绍三种奇异期权——障碍期权、亚式期权和回望期权，并介绍如何利用蒙特卡罗模拟的方法有效地确定它们的几何布朗运动风险中性价值．13.8节将给出指数看涨期权的风险中性价值公式，这个期权在执行时的支付，就是当时标的证券价格的某个指定幂次超出期权执行价的部分．

13.2 障碍期权

为了定义一个具有执行价 K 和到期日 t 的欧式障碍看涨期权，要先指定一个障碍值 v．当标的证券价格跨越障碍值时障碍期权是继续存在还是作废，取决于其类型．**下敲入障碍期权**(down-and-in barrier option)仅当 t 以前证券价格降至 v 以下时，才得以存在；而**下敲出障碍期权**(down-and-out barrier option)当证券的价格在 t 之前降至 v 以下时，就作废了．对这两种期权而言，v 是某个小于证券初始价格 s 的指定数．另外，在大多数应用中，突破障碍仅仅是考虑证券收盘价低于 v 的情况；这就是说，在交易日之中发生价格低于 v 的情况并不认为是突破了障碍．现在，如果同时拥有两个有相同执行价 K 和到期日 t 的下敲入看涨期权和下敲出看涨期权，那么在时刻 t，恰有一个期权有效(如果突破了障碍，就是下敲入看涨期权有效，否则是下敲出看涨期权有效)；因此，同时持有这两个期权就相当于拥有一个具有执行价 K 和到期日 t 的普通期权．如果以 $D_i(s,t,K)$ 和 $D_o(s,t,K)$ 分别表示下敲入看涨期权和下敲出看涨期权的风险中性价值，那么 247

$$D_i(s,t,K)+D_o(s,t,K)=C(s,t,K),$$

其中，$C(s,t,K)$ 是由式(7-2)给出的 Black-Scholes 价值．确定了 $D_i(s,t,K)$ 或 $D_o(s,t,K)$ 中的一个就可以自动获得另一个．

此外还有**上敲入障碍看涨期权**(up-and-in barrier call option)和**上敲出障碍看涨期权**(up-and-out barrier call option)．上敲入看涨期权仅当证券的价格在 t 之前超过 v 时，才得以存在；而上敲出看涨期权则在证券价格于 t 之前超过 v 时，就作废了．对这两种期权，障碍值 v 要大于执行价 K．由于同时拥有这样两个有相同执行价 K 和到期日 t 的期权相当于拥有一个普通期权，故有

$$U_i(s,t,K)+U_o(s,t,K)=C(s,t,K),$$

其中 U_i 和 U_o 分别是上敲入看涨期权和上敲出看涨期权的几何布朗运动风险中性价值，C 仍然是 Black-Scholes 价值.

13.3 亚式期权和回望期权

亚式期权(Asian option)在 t 时刻的执行价格依赖于从 0 时刻(即购买期权的时刻)至到期日为止的某段时间内标的证券的**平均价格**. 由于这个平均价格通常是以收盘价来计算的，因此令 N 表示一年中的交易天数(通常取 252 天)，并令

$$S_d(i) = S(i/N)$$

表示在第 i 日收盘时证券的价格. 通常亚式看涨期权的到期日是在 n 个交易日后，执行价为 K，支付为

248

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{S_d(i)}{n} - K\right)^{+}.$$

另一种亚式期权将平均价格视为执行价；因此当到期日是 n 个交易日之后时，这个看涨期权最终的价值为

$$\left(S_d(n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{S_d(i)}{n}\right)^{+}.$$

另一种奇异期权称为**回望期权**(lookback option)，它的执行价是期权到期日及此前标的证券的最小收盘价. 这就是说，如果到期日是在 n 个交易日之后，那么在到期日的支付为

$$S_d(n) - \min_{i=1,\cdots,n} S_d(i).$$

因为这些期权的最终支付都依赖于标的证券在期权有效期内收盘价格路径，因此对于障碍期权、亚式期权和回望期权，并没有确切的风险中性价值公式. 但是，利用蒙特卡罗模拟方法可以快速有效地得到它们的近似值.

13.4 蒙特卡罗模拟

假设需要估计某个随机变量 Y 的期望值 θ，

$$\theta = E[Y].$$

并且假设能够产生与 Y 具有相同概率分布的独立随机变量的值. 每产生一个这样的值，就称完成了一次模拟. 假设进行了 k 次模拟，产生了 k 个值 Y_1，Y_2，…，Y_k. 如果令

249

$$\bar{Y} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y_i$$

是它们的代数平均值，那么 $\bar{Y}$ 就可以当作 θ 的一个估计值. 它的期望和方差如下. 对于期望，有

$$E[\bar{Y}] = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}E[Y_i] = \theta.$$

令

$$v^2 = \mathrm{Var}(Y),$$

可以得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\bar{Y}) &= \mathrm{Var}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}Y_i\right)\\ &= \frac{1}{k^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{k}Y_i\right)\\ &= \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Var}(Y_i) \qquad \text{(由独立性)}\\ &= v^2/k.\end{aligned}$$

根据中心极限定理，对于取值很大的 k，$\bar{Y}$ 具有近似正态分布．因为正态随机变量与其均值之间通常不会有太大的标准差(等于其方差的平方根)，因此如果 $v/\sqrt{k}$ 很小，那么 $\bar{Y}$ 一般会很接近 θ．（例如，一个正态随机变量有 95%的时间分布在它的均值的两个标准差之间，因此可以有 95%的把握确信 $\bar{Y}$ 产生的值在 $\theta-v/\sqrt{k}$ 和 $\theta+v/\sqrt{k}$ 之间．)所以当 k 很大时，$\bar{Y}$ 是 θ 的一个较好的估计量．（为了得到估计的精确程度，可以利用产生的样本方差来估计 v^2．)这种估计期望值的方法就称为蒙特卡罗模拟．

13.5 奇异期权的模拟定价

假设名义利率为 r，证券的价格服从风险中性几何布朗运动；这就是说，它服从一个具有方差参数 σ^2、漂移参数 μ 的几何布朗运动，其中

$$\mu = r - \sigma^2/2.$$

250

令 $S_d(i)$ 表示证券在第 i 日末的价格，并令

$$X(i) = \log\left(\frac{S_d(i)}{S_d(i-1)}\right).$$

在几何布朗运动情形，相邻日价格比是独立的，因此 $X(1)$，…，$X(n)$ 是独立的正态随机变量，每一个都具有均值 μ/N 和方差 σ^2/N(和前面一样，N 表示一年中交易日的天数)．因此，通过产生 n 个具有这样均值和方差的独立正态随机变量，就可以构造一个具有 n 个收盘价的序列，它与由风险中性几何布朗运动模型产生的价格具有相同的概率．（绝大多数的计算机语言和几乎所有的电子制表软件都有内嵌的应用程序来产生标准正态随机变量；将这些值乘以 $\sigma/\sqrt{N}$，再加上 μ/N，就可以得到想要的正态随机变量．)

假设要计算一个下敲入障碍期权的风险中性价值，这个期权的执行价为 K，

障碍值为 v，初始值 $S(0)=s$，到期日是在 n 个交易日末. 首先产生 n 个均值为 μ/N、方差为 σ^2/N 的独立正态随机变量，令它们分别等于 $X(1)$，…，$X(n)$，然后从以下的等式中决定收盘价序列：

$$\begin{aligned}
S_d(0) &= s,\\
S_d(1) &= S_d(0)e^{X(1)},\\
S_d(2) &= S_d(1)e^{X(2)};\\
&\vdots\\
S_d(i) &= S_d(i-1)e^{X(i)};\\
&\vdots\\
S_d(n) &= S_d(n-1)e^{X(n)}.
\end{aligned}$$

对于这些价格，如果其中有一个收盘价低于障碍值 v，就令 I 等于 1，否则等于 0，即

251

$$I=\begin{cases}1 & \text{如果对某个 } i=1,\cdots,n, S_d(i)<v,\\ 0 & \text{如果对所有的 } i=1,\cdots,n, S_d(i)\geqslant v.\end{cases}$$

因为下敲入看涨期权只有当 $I=1$ 时才会存在，所以到期日 n 时的支付在 0 时刻的值为

$$\text{下敲入看涨期权的支付} = e^{-rn/N}I(S_d(n)-K)^+.$$

记这个支付为 Y_1. 重复这个过程 $k-1$ 次，得到 Y_1，Y_2，…，Y_k，这是 k 个支付值的集合. 这时就可以将它们的平均值当作这个障碍期权的风险中性几何布朗运动价值的一个估计值.

亚式看涨期权和回望看涨期权的风险中性价值也可以通过类似的方法得到. 与前面一样，首先产生 $X(1)$，…，$X(n)$ 的值，再利用它们来计算 $S_d(1)$，…，$S_d(n)$. 对于亚式期权，如果执行价固定为 K，支付依赖于收盘价的平均值，那么令

$$Y=e^{-rn/N}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{S_d(i)}{n}-K\right)^+.$$

如果将收盘价的平均值当作执行价，则令

$$Y=e^{-rn/N}\left(S_d(n)-\sum_{i=1}^{n}\frac{S_d(i)}{n}\right)^+.$$

对于回望期权，可以令

$$Y=e^{-rn/N}(S_d(n)-\min_i S_d(i)).$$

重复这个过程 $k-1$ 次，并计算这 k 个值的平均值，就可以得到风险中性价值的蒙特卡罗估计值.

13.6 更有效的模拟估计式

本节将介绍如何借助控制变量和对偶变量，来更有效地模拟亚式期权和回望

期权的价值，并介绍如何通过条件期望的方差缩减技术以及重要性抽样的方法来改进对障碍期权价值的模拟. 252

13.6.1 亚式期权和回望期权价值模拟中的控制变量和对偶变量

考虑一般情况，用模拟方法估计

$$\theta = E[Y].$$

假设在产生随机变量 Y 值的过程中，还知道了某个随机变量 V 的值，它的均值为 $\mu_V = E[V]$. 那么，代替 Y，用具有以下形式的某个值作为估计量：

$$Y + c(V - \mu_V),$$

其中，c 是待确定的常数. 从下面的式子可以看出，上式确实是 θ 的估计量：

$$E[Y + c(V - \mu_V)] = E[Y] + cE[V - \mu_V] = \theta + c(\mu_V - \mu_V) = \theta.$$

此种类型的最佳估计量就是选择 c 使得 $\mathrm{Var}(Y+c(V-\mu_V))$ 尽可能地小. 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y + c(V - \mu_V)) &= \mathrm{Var}(Y + cV) \\ &= \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(cV) + 2\mathrm{Cov}(Y, cV) \\ &= \mathrm{Var}(Y) + c^2\mathrm{Var}(V) + 2c\mathrm{Cov}(Y, V), \qquad (13\text{-}1)\end{aligned}$$

对式(13-1)关于 c 求导数，并令导数等于 0，再解出 c，则使得 $\mathrm{Var}(Y+c(V-\mu_V))$ 最小的 c 值应为

$$c^* = -\frac{\mathrm{Cov}(Y, V)}{\mathrm{Var}(V)}.$$

将这个值代回到式(13-1)，就可以得到

$$\mathrm{Var}(Y + c^*(V - \mu_V)) = \mathrm{Var}(Y) - \frac{\mathrm{Cov}^2(Y, V)}{\mathrm{Var}(V)}. \qquad (13\text{-}2)$$

在等式的两边同时除以 $\mathrm{Var}(Y)$ 得出

$$\frac{\mathrm{Var}(Y + c^*(V - \mu_V))}{\mathrm{Var}(Y)} = 1 - \mathrm{Corr}^2(Y, V),$$

253

其中

$$\mathrm{Corr}(Y, V) = \frac{\mathrm{Cov}(Y, V)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)\mathrm{Var}(V)}}$$

是 Y 和 V 的相关系数. 因此，当利用控制变量 V 时，可以减少方差 $100\mathrm{Corr}^2(Y, V)\%$.

用来决定 c^* 的 $\mathrm{Cov}(Y, V)$ 和 $\mathrm{Var}(V)$ 的值通常是未知的，必须通过模拟得到的数据来估计. 如果进行了 k 次模拟，得到 Y_i 和 $V_i(i=1, \cdots, k)$，那么令样本均值为

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_i}{k}, \quad \bar{V} = \sum_{i=1}^{k} \frac{V_i}{k}.$$

Cov(Y，V)可通过下式来估计：

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}(Y_i-\overline{Y})(V_i-\overline{V})}{k-1},$$

Var(V)由以下的样本方差来估计：

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}(V_i-\overline{V})^2}{k-1}.$$

综合上面的估计就可以得到 c^* 的估计量，即

$$\widehat{c^*}=-\frac{\sum_{i=1}^{k}(Y_i-\overline{Y})(V_i-\overline{V})}{\sum_{i=1}^{k}(V_i-\overline{V})^2},$$

并可以产生以下关于 θ 的控制模拟估计量：

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(Y_i+\widehat{c^*}(V_i-\mu_V)).$$

现在来看如何用控制变量对亚式期权的价值进行模拟. 首先假设最终支付的现值为

254

$$Y=\mathrm{e}^{-rn/N}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{S_d(i)}{n}-K\right)^{+}.$$

显然，Y 和

$$V=\sum_{i=0}^{n}S_d(i)$$

具有很强的正相关性，所以一种可能的做法是将 V 当作一个控制变量. 为此，必须首先确定 $E[V]$. 因为

$$E[S_d(i)]=\mathrm{e}^{ri/N}S(0),$$

故对于风险中性价值，有

$$\begin{aligned}E[V]&=E\left[\sum_{i=0}^{n}S_d(i)\right]\\&=\sum_{i=0}^{n}E[S_d(i)]\\&=S(0)\sum_{i=0}^{n}(\mathrm{e}^{r/N})^i\\&=S(0)\frac{1-\mathrm{e}^{r(n+1)/N}}{1-\mathrm{e}^{r/N}}.\end{aligned}$$

另一种控制变量的选择，是与亚式期权有相同执行价和到期日的标准期权的支付. 这就是说，可以取

$$V = (S_d(n) - K)^+$$

作为控制变量.

还有一种有效的方差缩减技术是利用对偶变量. 这种方法首先产生数据 $X(1)$，…，$X(n)$，并利用它们来计算 Y. 然而，与其再产生另一组数据，不如通过以下的变化再利用一下已有的数据：

$$X(i) \Rightarrow \frac{2(r-\sigma^2/2)}{N} - X(i).$$

这就是说，对于每一个 $i=1$，…，n，令 $X(i)$ 的新值等于 $2(r-\sigma^2/2)/N$ 与它原来的值之差. ($X(i)$ 的新值与它原来的值是负相关的，但是它们仍然是具有相同均值和方差的正态随机变量.) 利用这些新的值，就可以计算 Y 的值了，而通过模拟所得估计值是两个 Y 值的平均值. 可以证明(见参考文献[5])，以这种方式重新利用数据，会比再产生一组新数据的方法有更小的方差. 255

现在考虑亚式看涨期权，它的执行价是股票日收盘价的平均值. 即最终支付的现值为

$$Y = e^{-rn/N}\left(S_d(n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{S_d(i)}{n}\right)^+.$$

回忆一次模拟过程包括：a)产生独立正态随机变量 $X(1)$，…，$X(n)$，它们的均值为 $(r-\sigma^2/2)/N$，方差为 σ^2/N；b)置

$$S_d(i) = S(0)e^{X(1)+\cdots+X(i)}, \quad i = 1,\cdots,n.$$

因为当排在序列 $X(1)$，…，$X(n)$ 后面的值都是最大值时，Y 的值也将会较大(反之则会很小)，因此可以选择以下类型的控制变量：

$$V = \sum_{i=1}^{n} w_i X(i),$$

其中，权重 w_i 关于 i 递增. 然而，建议使用所有的变量 $X(1)$，…，$X(n)$ 作为控制变量. 这就是说，从每次模拟中，考虑估计量

$$Y + \sum_{i=1}^{n} c_i\left(X(i) - \frac{r-\sigma^2/2}{N}\right).$$

因为控制变量是独立的，很容易证明(见练习 13.4) c_i 的最优值为

$$c_i = -\frac{\mathrm{Cov}(X(i),Y)}{\mathrm{Var}(X(i))}, \quad i = 1,\cdots,n;$$

这些量都可以通过模拟的结果来估计. 建议在回望期权中使用同样的方法：使用所有的变量 $X(1)$，…，$X(n)$ 作为控制变量. 256

13.6.2 条件期望和重要性抽样在障碍期权价值模拟中的作用

13.5 节给出了一种模拟方法，以确定一个下敲入障碍看涨期权在几何布朗运动下的风险中性支付的期望价值. 这种模拟方法要产生 $X(i)$ 并用它来计算每日的收盘价和期权的支付. 注意到为了使得这个期权得以存在，至少有一个收盘价要降至障碍值之下. 可以对上述方法进行改进. 对于产生的数据，假设第一个小于障碍值的收盘价发生在第 j 天末，且该天结束时价格为 $S_d(j)=x<v$. 此时障碍期权得以生存，只要给定离期权到期还有时间 $(n-j)/N$ 时证券的价格 x，它的价值就是一个标准看涨期权的价值. 但是这意味着期权现在的价值为 $C(x, (n-j)/N, K)$. 因此，看起来可以如下进行：a) 只要有一个收盘价降至障碍值之下就停止模拟；b) 利用得出的 Black-Scholes 价值作为此次模拟的估计量. 事实上，的确可以这么做. 最终的估计量称为**条件期望估计量**，可以证明它比从 13.5 节中得到的估计量具有更小的方差.

利用**重要性抽样**的模拟技术可以进一步改进条件期望估计量. 由于在多次模拟中收盘价小于障碍值的情形可能一次也不会出现，因此如果能够首先从更可能产生小于障碍值的收盘价的一组概率中模拟出数据，然后加上一个因子以对这些不同的概率进行补偿，那么近似的效果会好得多. 这就是重要性抽样的思想. 该方法从具有均值 $(r-\sigma^2/2)/N-b$ 和方差 σ^2/N 的正态分布中产生随机变量 $X(1)$, $X(2)$, …，并决定生成的收盘价首次降至障碍值之下的时间. 如果收盘价在时刻 j 第一次降至障碍值之下时为 x，那么从这次模拟中得到的估计量为

257

$$C(x,(n-j)/N,K)\exp\left\{\frac{jb^2N}{2\sigma^2}+\frac{Nb}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{j}X_i-\frac{jb}{\sigma^2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right\}$$

(细节请见参考文献[6])；如果这些价格永远也不低于障碍值，那么这次模拟的估计量就是 0. 多次模拟得出的估计量的平均值就是期权价值的整体估计量. 当然，为完成这一步骤，必须选择合适的 b. 最好的方法是通过经验选择 b. 有兴趣时可以做一些小模拟，看看 b 取何值时具有较小的方差. 另外，选择下面的 b 值对于这种方法是有效的(参见参考文献[1])：

$$b=\frac{r-\sigma^2/2}{N}-\frac{2\log\left(\frac{S(0)}{v}\right)+\log\left(\frac{K}{S(0)}\right)}{n}.$$

13.7 非线性支付期权

对于一个标准的看涨期权，只要在执行时刻标的证券的价格高于其执行价，它的支付就是证券价格的线性函数. 然而，有更多的期权的支付具有以下形式：

$$(h(S(t))-K)^+,$$

其中 h 是任意的既定函数，t 是到期日，K 是执行价. 当用多期二叉树模型近似

几何布朗运动时，常需要使用模拟或其他数值方法来决定这些期权的几何布朗运动风险中性价值. 当 h 形如

$$h(x)=x^{\alpha}$$

时，可以得到相应价值确切的公式. 具有非线性支付$(S^{\alpha}(t)-K)^{+}$的期权称为指数期权，α 称为指数参数.

以 $C_{\alpha}(s, t, K, \sigma, r)$表示一个指数看涨期权的风险中性价值，其中指数参数为 α，到期日为 t，执行价为 K，利率为 r，标的证券的初始价格为 s，证券价格服从具有波动率 σ 的几何布朗运动. 和通常一样，用 $C(s, t, K, \sigma, r)=C_{1}(s, t, K, \sigma, r)$表示 Black-Scholes 价值，并令 X 为具有均值$(r-\sigma^{2}/2)t$ 和方差 $\sigma^{2}t$ 的正态随机变量. 因为 e^{X} 和 $S(t)/s$ 具有相同的概率分布，所以得出 [258]

$$e^{rt}C(s,t,K,\sigma,r)=E[(S(t)-K)^{+}]=E[(se^{X}-K)^{+}]. \tag{13-3}$$

另外，由于$(S(t)/s)^{\alpha}=S^{\alpha}(t)/s^{\alpha}$和 $e^{\alpha X}$具有相同的概率分布，又可得到

$$E[(S^{\alpha}(t)-K)^{+}]=E[(s^{\alpha}e^{\alpha X}-K)^{+}]. \tag{13-4}$$

而 αX 是具有均值$\alpha(r-\sigma^{2}/2)t$ 和方差 $\alpha^{2}\sigma^{2}t$ 的正态随机变量，因此由式(13-3)，若 r_{α} 和 σ_{α} 分别使得

$$r_{\alpha}-\sigma_{\alpha}^{2}/2=\alpha(r-\sigma^{2}/2) \quad 和 \quad \sigma_{\alpha}^{2}=\alpha^{2}\sigma^{2},$$

那么

$$e^{r_{\alpha}t}C(s^{\alpha},t,K,\sigma_{\alpha},r_{\alpha})=E[(s^{\alpha}e^{\alpha X}-K)^{+}].$$

因此，由式(13-4)，可得到

$$\begin{aligned}
&e^{-rt}E[(S^{\alpha}(t)-K)^{+}]\\
&\quad=e^{-rt}e^{r_{\alpha}t}C(s^{\alpha},t,K,\alpha\sigma,r_{\alpha})\\
&\quad=\exp\{(\alpha(r-\sigma^{2}/2)+\alpha^{2}\sigma^{2}/2-r)t\}C(s^{\alpha},t,K,\alpha\sigma,r_{\alpha})\\
&\quad=\exp\{(\alpha-1)(r+\alpha\sigma^{2}/2)t\}C(s^{\alpha},t,K,\alpha\sigma,r_{\alpha}).
\end{aligned}$$

即

$$C_{\alpha}(s,t,K,\sigma,r)=\exp\{(\alpha-1)(r+\alpha\sigma^{2}/2)t\}C(s^{\alpha},t,K,\alpha\sigma,r_{\alpha}),$$

其中

$$r_{\alpha}=\alpha(r-\sigma^{2}/2)+\alpha^{2}\sigma^{2}/2.$$

13.8 通过多期二叉树模型近似定价

多期二叉树模型也可以用来有效地确定某些奇异期权的风险中性几何布朗运动价格. 例如，考虑一个下敲出障碍看涨期权，标的证券的初始价格为 s，执行价为 K，到期日为 $t=n/N$(其中 N 是一年中的交易日天数)，障碍值为 $v(v<s)$. [259] 首先选择一个整数 j，令 $m=nj$，$t_{k}=kt/m(k=0, 1, \cdots, m)$. 将每一天视为由

j 个时间段组成，利用 m 期二叉树模型来进行近似模拟. 假设

$$S(t_{k+1}) = \begin{cases} uS(t_k) & \text{以概率 } p, \\ dS(t_k) & \text{以概率 } 1-p, \end{cases}$$

其中

$$u = e^{\sigma\sqrt{t/m}}, \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{t/m}},$$
$$p = \frac{1+rt/m-d}{u-d}.$$

如果前 k 个价格变化中有 i 个是上升的，而有 $k-i$ 个是下降的，那么在 t_k 时刻的价格为

$$S(t_k) = u^i d^{k-i} s.$$

令 $V_k(i)$ 表示障碍看涨期权的期望支付值，这里假设在 t_k 时刻该期权仍然生存并且价格为 $S(t_k)=u^i d^{k-i}s$，那么可以利用 $e^{-rt}V_0(0)$ 来近似欧式障碍看涨期权的期望支付现值. $V_0(0)$ 的值可以通过逆向计算得到. 这就是说，可以从下面的等式开始

$$V_m(i) = (u^i d^{m-i} s - K)^+, \quad i = 0, \cdots, m,$$

首先确定 $V_m(0)$ 的值，然后重复使用以下的方程(开始时令 $k=m-1$，然后在每次迭代后将 k 的值减 1)：

$$V_k(i) = pV_{k+1}(i+1) + (1-p)W_{k+1}(i), \tag{13-5}$$

其中

$$W_{k+1}(i) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } u^i d^{k+1-i} s < v, j \text{ 整除 } k+1, \\ V_{k+1}(i) & \text{否则.} \end{cases}$$

之所以这样定义 $W_{k+1}(i)$，是因为如果 j 整除 $k+1$，那么 $(k+1)$ 时期的价格就是一个收盘价，如果它比障碍值小将会使得期权作废.

可以使用类似的步骤得到下敲入看涨期权的风险中性价格. 或者，也可以使用前面的方法来确定一个具有相同参数的下敲出看涨期权的价格，再利用下面的等式：

260

$$D_i(s,t,K) + D_o(s,t,K) = C(s,t,K),$$

其中 D_i，D_o 和 C 分别是下敲入看涨期权、下敲出看涨期权和普通的 Black-Scholes 看涨期权的风险中性价格.

其他奇异期权的风险中性价格也可以通过多期二叉树模型来近似. 不过，计算量可能会很大. 例如，考虑一个亚式期权，它的执行价是标的证券收盘价的平均值. 为了逐步地确定在时刻 t_k 出现的所有最终支付的期望值，不仅需要确定在时刻 t_k 的价格，还要确定到该时刻为止的收盘价之和. 这就是说，为了利用 n 期二叉树模型来近似一个 n 日看涨期权，需要逐步地计算最终期望支付值

$V_k(i, x)$，其中 k 期后证券的价格为 $u^i d^{k-i} s$，前 k 个价格之和为 x. 在前面 k 个价格中有 i 个处于上升时，前 k 个价格之和就会出现 $\binom{k}{i}$ 种可能，因此需要非常大的计算量才能得到一个较好的估计值. 一般来说，对于绝大多数依赖路径的奇异期权，建议使用模拟的方法来估计风险中性价格.

13.9 障碍期权和回望期权的连续时间近似

障碍期权的无套利价格，比如上敲出障碍期权，可用一个连续时间的模型来近似，在这个连续时间模型中，如果证券的价格在期权交易时刻 t 为止的任何一个时刻(不必一定是到期时刻)超过障碍值 v，则期权作废. 即期权在 t 时刻的收益为 $I(S(t)-K)^+$，其中，

$$I=\begin{cases}1 & \text{如果} \max\limits_{0\leqslant w\leqslant t} S(w)\leqslant v,\\ 0 & \text{如果} \max\limits_{0\leqslant w\leqslant t} S(w)> v.\end{cases}$$

下面计算风险中性几何布朗运动条件下期望收益的现值. 设 $X(w)(w\geqslant 0)$是漂移参数为 $\mu_r\equiv r-\sigma^2/2$，方差参数为 σ^2 的布朗运动，且 $X(0)=0$，则有

$$S(w)=s\mathrm{e}^{X(w)}, w\geqslant 0,$$

261

其中，$s=S(0)$. 用 $f_{X(t)}$ 表示均值为 $\mu_r t$，方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量 $X(t)$的密度函数，则在 $X(t)$已知条件下，有

$$\begin{aligned}E[I(S(t)-K)^+] &= E[I(s\mathrm{e}^{X(t)}-K)^+]\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[I(s\mathrm{e}^{X}(t)-K)^+ \mid X(t)=x] f_{X(t)}(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

记 $M(t)=\max\limits_{0\leqslant w\leqslant t} X(w)$，则有：当 $s\mathrm{e}^{M(t)}\leqslant v$ 时，$I=1$，否则 $I=0$. 由 $S(t)=s\mathrm{e}^{X(t)}$ 不在 K 与 v 之间时期权的收益必然为 0，有

$$\begin{aligned}E[I(S(t)-K)^+] &= \int_{\ln(K/s)}^{\ln(v/s)} (s\mathrm{e}^{x}-K) E[I \mid X(t)=x] f_{X(t)}(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{\ln(K/s)}^{\ln(v/s)} (s\mathrm{e}^{x}-K) P(M(t)\leqslant \ln(v/s) \mid X(t)=x)\\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma}} \mathrm{e}^{-(x-t\mu r)^2/2t\sigma^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

回忆第 3 章定理 3.4.1，它给出了当给定 $X(t)$的值时 $M(t)$的条件分布，所以上面的积分可以精确地算出来，这留给有兴趣的读者去完成.

通过类似的讨论可以得出回望期权，其收益为 $S(t)-\min\limits_{0\leqslant w\leqslant t} S(w)$ 或 $(\max\limits_{0\leqslant w\leqslant t} S(w)-K)^+$ 的回报的期望现值的精确表达式. 前一种情况先考虑在 $X(t)$ 条件下的计算，然后利用给定 $X(t)$时 $\min\limits_{0\leqslant w\leqslant t} X(w)$的条件分布. 后一种情况的计算正好可利用一个布朗运动过程到 t 时刻为止的最大变量的分布.

13.10 习题

练习 13.1 考虑一个在 t 时刻之前随时都可执行的美式看涨期权，当它在 y 时刻($0\leqslant y\leqslant t$)执行时，执行价为 Ke^{uy}，其中 u 是某个特定的值. 这就是说，如果看涨期权在 y 时刻($0\leqslant y\leqslant t$)执行，它的支付为

262

$$(S(y)-e^{uy}K)^+.$$

证明，如果 $u\leqslant r$，那么永远不会提前执行这个看涨期权. 其中，r 为利率.

练习 13.2 一个回望看跌期权在 n 个交易日之后到期，其支付为在时刻 n 前标的证券的最大收盘价减去在 n 时刻的价格. 这就是说，它的支付为

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n} S_d(i)-S_d(n).$$

请解释如何有效地利用蒙特卡罗模拟方法来得到该期权的几何布朗运动风险中性价格.

练习 13.3 在 13.6.1 节中曾经提到 $V=(S_d(n)-K)^+$ 可以用作控制变量. 然而，这样做需要知道它的均值. 请求出 $E[V]$的值.

练习 13.4 令 X_1，…，X_n 是具有期望值 $E[X_i]=\mu_i$ 的独立随机变量. 考虑以下对 $E[Y]$的模拟估计量：

$$W=Y+\sum_{i=1}^{n}c_i(X_i-\mu_i).$$

a)证明

$$\mathrm{Var}(W)=\mathrm{Var}(Y)+\sum_{i=1}^{n}c_i^2\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{i=1}^{n}c_i\mathrm{Cov}(Y,X_i).$$

b)利用微积分方法证明使得 $\mathrm{Var}(W)$最小的 c_1，…，c_n 的值应为

$$c_i=-\frac{\mathrm{Cov}(Y,X_i)}{\mathrm{Var}(X_i)},\quad i=1,\cdots,n.$$

练习 13.5 使用蒙特卡罗模拟方法来估计一个奇异期权的风险中性价值. 第一次估计不用任何方差缩减技术，第二次时选用某种方差缩减技术.

263

练习 13.6 给出利用多期二叉树模型来估计一个下敲入障碍看涨期权的风险中性价格时所需的方程.

练习 13.7 请解释如何利用多期二叉树模型来估计一个美式下敲出看涨期权的风险中性价格.

练习 13.8 请解释为什么式(13-5)成立.

参考文献

[1] Boyle, P., M. Broadie, and P. Glasserman(1997). "Monte Carlo Methods for Security Pricing." *Journal of Economic Dynamics and Control* 21: 1267—1321.

[2] Conze, A., and R. Viswanathan(1991). "Path Dependent Options: The Case of Lookback Options." Journal of Finance 46: 1893—1907.

[3] Goldman, B., H. Sosin, and M. A. Gatto(1979). "Path Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High." *Journal of Finance* 34: 1111—27.

[4] Hull, J. C., and A. White(1998). "The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 23: 237—51.

[5] Ross, S. M. (2002). *Simulation*, 3rd ed. Orlando, FL: Academic Press.

[6] Ross, S. M., and J. G. Shanthikumar (2000). "Pricing Exotic Options: Monotonicity in Volatility and Efficient Simulations." *Probability in the Engineering and Informational Sciences* 14: 317—26.

[7] Ross, S. M., and S. Ghamam (2010). "Efficient Monte Carlo Barrier Option Pricing When the Underlying Security Price Follows a Jump-Diffusion Process." *The Journal of Derivatives* 17(3): 45—52.

[8] Rubinstein, M. (1991). "Pay Now, Choose Later." *Risk*(February).

264

第14章　非几何布朗运动模型

14.1　引言

正如前面所指出的那样，对一个证券的价格过程作几何布朗运动假设(它也是 Black-Scholes 定价公式的假设)有一个重要前提，就是该证券未来价格变化与历史价格变动情况是无关的. 许多投资者都承认这个前提，但也有很多人不认同. 接受此前提的投资者认为这是*有效市场假说*的推论. 该假说断言，一个证券的当前价格包含了现在所有可能得到的信息，这些信息中也包括此证券的历史价格. 然而，批评者争辩说，不同的投资者对新信息的接纳速度是不一样的，因此过去的价格变动情况反映了那些尚未被普遍知晓但还会影响未来价格的信息. 本章假定没有任何先验的原因使得未来价格变化必定与过去的价格无关，所以应该通过考察实际价格数据以检验它们是否真的与几何布朗运动模型一致. 也就是说，与其匆忙地表示赞成哪一种观点，不如尽可能多地让实际数据来说话.

在 14.2 节将分析从 1995 年 1 月 3 日到 1997 年 11 月 19 日间，最近月期原油每个交易日末的价格(此时期正好处在亚洲金融危机之前，该危机严重影响了原油的需求，使其价格下跌). 作为实证分析的一部分，本节得出：这个价格序列与原油价格过程服从几何布朗运动的假设是不一致的. 在 14.3 节，提出了一个与这些数据一致且直观上可行的新模型. 本章还将讨论，如何在下面两种情形下用此模型来确定期权价格：a)假设未来价格变化与历史价格变动具有相似性；b)基于新模型的风险中性价值.

14.2　原油数据

将 1995 年 1 月 3 日定为第 0 天，$P(n)$记从第 0 天起第 n 个交易日末的最近月期原油价格(纽约商品交易所交易价). $P(n)$ ($n=1, \cdots, 752$) 的值标于图 14-1 中(本章末的表 14-5 给出了它们的数值).

令

$$L(n) = \log(P(n)),$$

并定义

$$D(n) = L(n) - L(n-1).$$

即 $D(n)(n\geqslant 1)$是相邻两天价格对数的差值. $D(n)$的值也在表 14-5 和直方图 14-2 中给出.

注意，在几何布朗运动下，$D(n)$应该是独立同分布的正态随机变量，图 14-2 中的直方图与来自正态总体的数据形成的直方图是一致的. 但是在作一

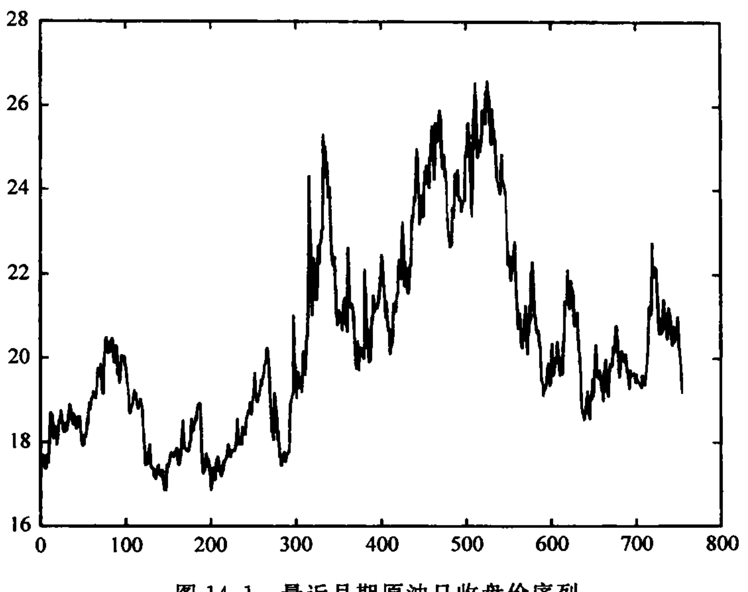


图 14-1 最近月期原油日收盘价序列

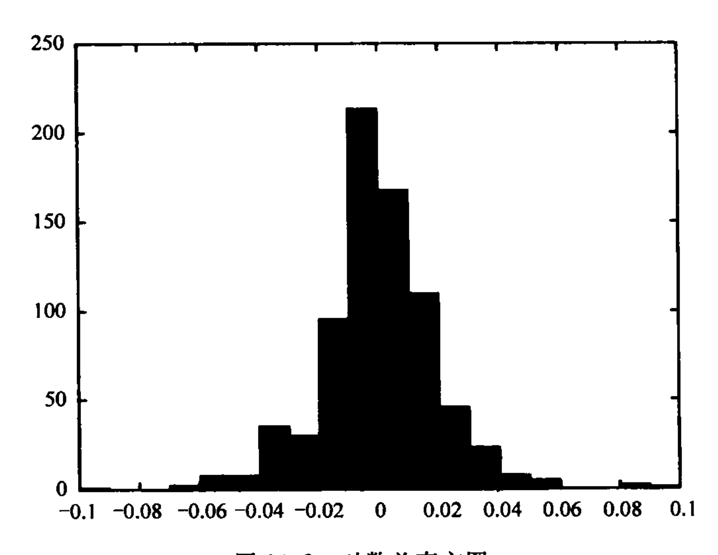


图 14-2 对数差直方图

个直方图时，是将数据按照数值大小将它们分成几个区间，然后统计出每个区间内数据的个数作成图．这样做就忽略了数据间可能存在的相互依赖信息．为了考虑这种相互依赖性，将每一天按以下方法分类，使它具有 4 种可能的状态之一．称第 n 天具有状态

1 如果 $D(n) \leqslant -0.01$，

2 如果 $-0.01 < D(n) \leqslant 0$，

3 如果 $0 < D(n) \leqslant 0.01$，

4 如果 $D(n) > 0.01$.

266~267

也就是说，将第 n 天的价格与第 $n-1$ 天的价格相比，如果损失大于 1%($e^{-0.01} \approx 0.99005$)，则该天具有状态 1；如果此相对损失小于 1%，则该天具有状态 2；如果相对收益小于 1%($e^{0.01} \approx 1.0101$)，则该天为状态 3；如果相对收益大于 1%，则它处于状态 4. 注意，如果价格过程服从几何布朗运动，则明天的状态与今天的状态无关. 有一种验证此假设的可行方法就是对 $i, j=1, \cdots, 4$，看有多少次当天处于状态 i，而随后的一天为状态 j. 表 14-1 给出的信息显示具有状态 3 的 168 天中，有 26 天的后一天为状态 1，46 天的后一天处于状态 2 等.

表 14-1

i	j				总计
	1	2	3	4	
1	55	41	44	36	176
2	44	65	45	60	214
3	26	46	47	49	168
4	52	62	31	48	193

如果像表 14-2 那样将数据表示成百分比的形式，表 14-1 的含义会更加清晰. 例如，一个大幅下跌(大于 1%)之后，紧接着大幅下跌的时间占 31%，紧接着小幅下跌的时间占 23%，紧接着小幅上涨的时间占 25%，而紧接着出现大幅上涨的时间占 21%. 有趣的是，一个中等涨幅后第二天出现大幅下跌的时间占 15%，大幅上涨之后紧接着大幅下跌的占 27%. 在几何布朗运动模型下，明天的变化是不受今天变化影响的，所以理论上讲表 14-2 中各行的期望百分比都应该是相同的. 可以使用一个标准统计检验程序(用于检验一个随机表格中数据的独立性)来检验实际数据遵循几何布朗运动的可能性. 将该程序应用到数据中得知 p 值等于 0.005. 这意味着如果行概率相等(由几何布朗运动推知)，则产生的数据与实际数据一样不支持等概率假设的可能性仅为 1/200(检验统计量的值等于 23.447，这导致 p 值为 0.005 26).

268

表 14-2

i	j			
	1	2	3	4
1	31	23	25	21
2	21	30	21	28
3	15	28	28	29
4	27	32	16	25

现将 751 个 $D(n)$值分为四组：第一组包括 176 个值(明天的价格对数减今天的价格对数)，一个值 $D(n)$属于第一组当且仅当 $n-1$ 天具有状态 1；其他组的分类类似：若 $n-1$ 天的状态是 2(或 3 或 4)，则 $D(n)$分在第二(或三或四)组．图 14-3～图14-6 给出了每一组数据的直方图．注意每个直方图都近似钟形，与正态密度函数的曲线相似．

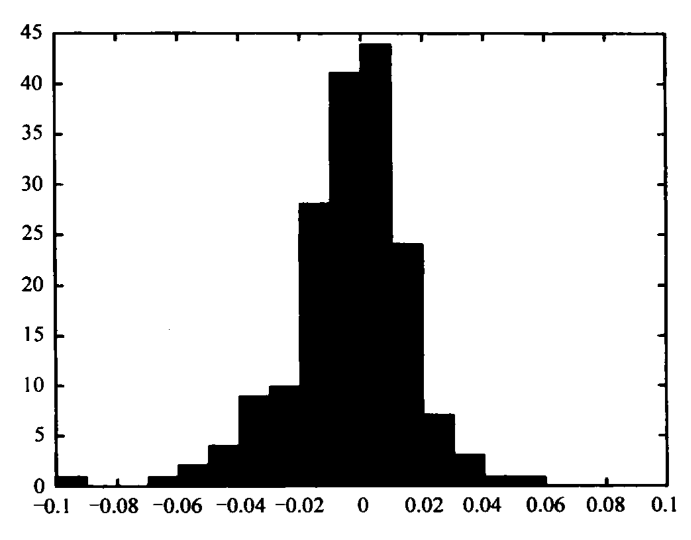


图 14-3 状态 1 下数据的直方图($n=176$)

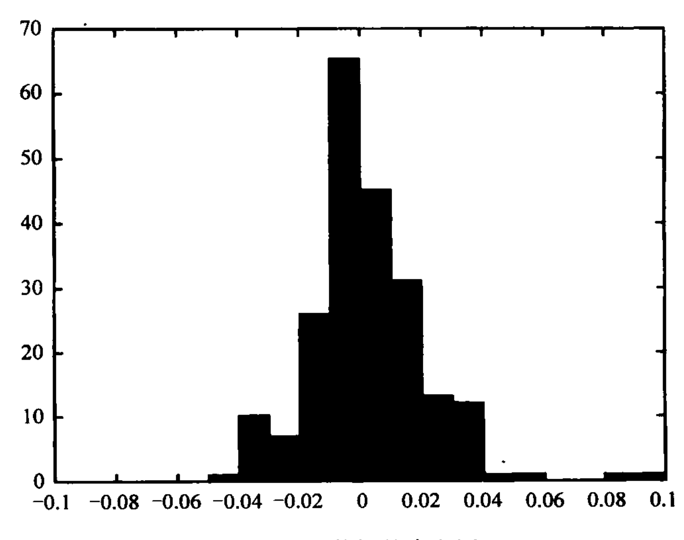


图 14-4 状态 2 下数据的直方图($n=214$)

设 $\bar{x}_i$，s_i 分别为组 $i(i=1，2，3，4)$的样本均值和样本标准差(它等于样本方差的平方根)．计算结果见表 14-3.

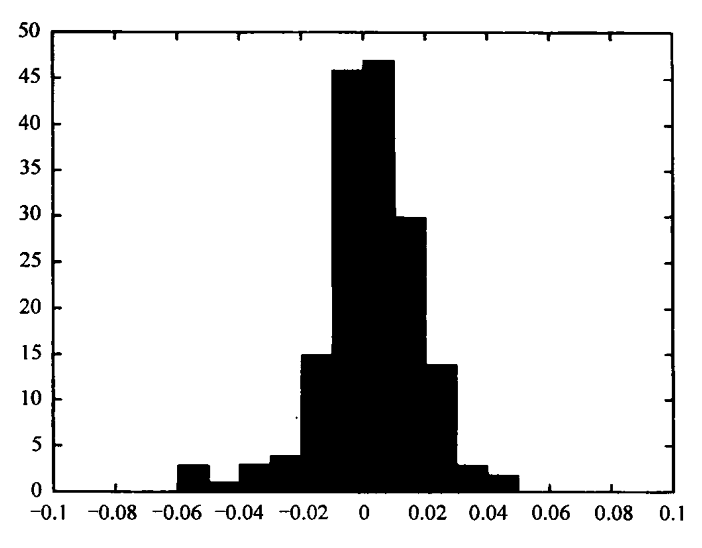


图 14-5 状态 3 下数据的直方图($n=168$)

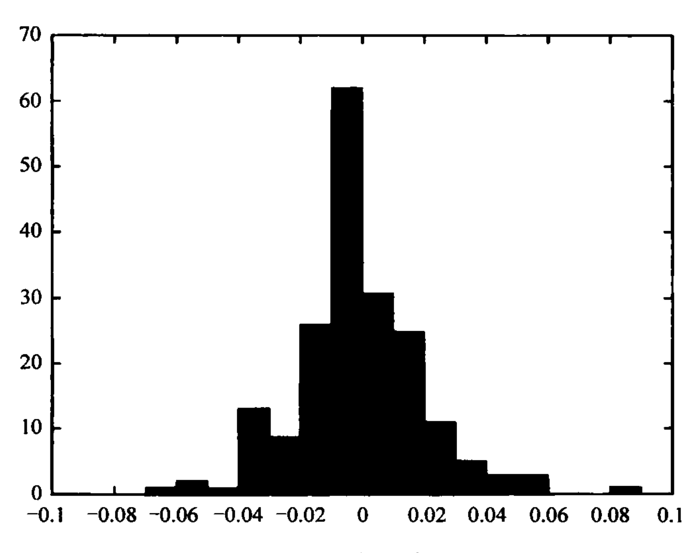


图 14-6 状态 4 下数据的直方图($n=193$)

表 14-3

i	均值 $\bar{x}_i$	S. D. s_i	i	均值 $\bar{x}_i$	S. D. s_i
1	−0.003 6	0.019 4	3	0.002 5	0.016 5
2	0.002 4	0.018 8	4	−0.001 1	0.020 8

在几何布朗运动模型下，这四组数据应该来自同一正态总体，所以可以用一个标准统计检验方法(称为单向方差分析法)来检验四组数据都来自同样均值和方差的正态随机变量这一假设. 计算结果显示，该检验统计量(当假设成立时，该

统计量服从自由度为(3，747)的 F 分布)的值等于 4.50，这个值相当大．事实上，如果“四组数据来自同一正态分布”这一假设成立，那么检验统计量的值不小于 4.50 的概率小于 0.001．这项统计检验更加证明了原油数据反映的价格过程不是几何布朗运动．(另外还可以用 Bartlett 检验法来检验“均值不等时，方差可能相等”的假设是否成立．使用我们的数据，此时检验统计量的值等于 9.59，相应 p 值小于 0.25.)

14.3 原油数据模型

一个合理的模型是：假设存在四个分布，它们可决定相继两天的价格对数差，且其中的某个分布依赖于今天的状态．但是，即使如此，仍要确定是否需要一个风险中性模型，或者一个基于如下假设的模型：未来价格常常延续过去的价格趋势．在后一种情形，使用这样的模型：如果今天的状态是 i，假设明天价格与今天价格比的对数是均值为 $\bar{x}_i$，标准差为 s_i 的正态随机变量($i=1$，2，3，4)，其中 $\bar{x}_i$，s_i 的值由表 14-3 中给出．但是，如果放弃正态假设，而使用“解鞋带”(bootstrap)方法，则很可能获得一个更好的模型．此方法假定，来自状态 i 的对数比分布的最佳近似，可以通过从该组 n_i 个数据中随机抽取一个的方法获得(这里，$n_1=176$，$n_2=214$，$n_3=168$，$n_4=193$)．无论假设这组数据是正态的还是改用 bootstrap 方法，都需要进行蒙特卡罗模拟(见第 13 章)，以求出拥有一个期权的期望值，甚至一个未来价格的期望值．不过，这种模拟是很直接的，也可以用方差缩减技术来缩短计算时间．

269 ~ 272

风险中性模型似乎最适宜用来判定一个期权的价格相对其标的证券的价格来说，是低估了还是高估了．假设在状态 i 下，上述对数比是均值为 μ_i，标准差为 s_i 的正态随机变量，那么此时就可以获得一个风险中性模型．这里

$$\mu_i = r/N - s_i^2/2;$$

r 是利率，N(一般等于 252)是一年的总交易天数．同样，此时也需要进行模拟从而确定期权的期望价值．

虽然根据相邻两天的价格对数比已经定义了四个不同状态，但是如果可以定义更多的状态，很可能会得到更好的模型．事实上，还有一个获得风险中性模型的方法就是将波动率确定为 $D(n)$ 的最新值的函数，方法是：假设 $D(n)$ 为 i 组的中点时，波动率等于 s_i，然后利用一般线性插值法(见图 14-7)．

除了利用上述四个状态来描述数据的分布外，还可以定义 6 个状态如下：

第 n 天的状态为

$$\begin{array}{ll} 1 & 若\ D(n) \leqslant -0.02, \\ 2 & 若\ -0.02 < D(n) \leqslant 0.01, \\ 3 & 若\ -0.01 < D(n) \leqslant 0, \end{array}$$

4 若 $0 < D(n) \leqslant 0.01$,

5 若 $0.01 < D(n) \leqslant 0.02$,

6 若 $D(n) > 0.02$.

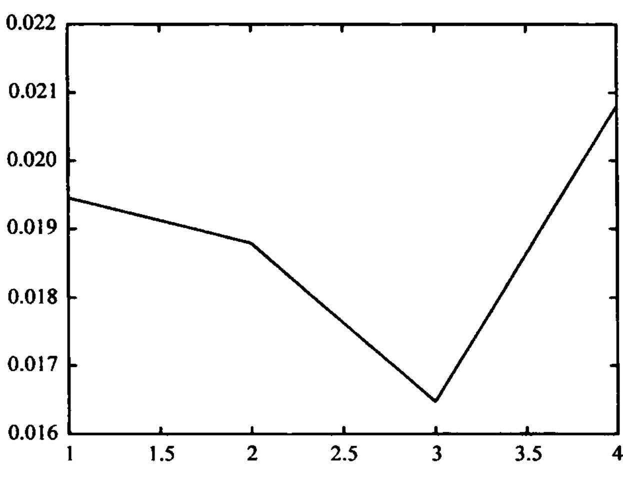


图 14-7 波动率作为状态的函数

在这些状态下，状态 j 紧随着状态 i 出现的次数在表 14-4 的第 i 行、第 j 列给出. 相应模型的分析与四状态模型时相同.

表 14-4

i	j						总计
	1	2	3	4	5	6	
1	10	12	25	19	12	3	81
2	17	16	16	25	12	9	95
3	18	26	65	45	31	29	214
4	11	15	46	47	30	19	168
5	14	15	39	19	13	10	110
6	12	11	23	12	12	13	83

14.4 最后的评论

由本章可以看出，并不是所有的证券价格数据都符合几何布朗运动假设. 几何布朗运动是马尔可夫模型. 这种模型(即证券价格过程)假定，其未来状态只依赖于当前的情况，而与历史状况无关. 但是，许多人认为证券近期的价格变动对预测其未来价格走向应该有一定的影响，这种想法似乎是合情理的. 在本章中，

273～274

提出了一个简单模型来描述日收盘价序列．该模型假定，相继两日价格之比所构成的序列是一个马尔可夫模型．也就是说，对于相继两日价格比形成的序列，几何布朗运动模型假定它是独立的，而本章提出的模型却允许它具有马尔可夫依赖性．

在利用这个模型来估计期权价值时，我们建议收集迄今为止的所有数据，并假设未来价格与历史价格有关，再利用“解鞋带”(bootstrap)法或者假设正态性，使用估计值$\overline{x}_i$，s_i 来建立期权价格模型．但是，如果想判定期权价格较其标的证券的价格是低估还是高估了，则建议在这个模型中使用风险中性变量．此时用$r/N-s_i^2/2$ 代替$\overline{x}_i$ 作为状态 i 下对数比的均值．这个风险中性模型允许波动率依赖于最近几日的价格变化，这与有效市场假设下的变量是一致的．该假设认为证券的当前价格在以下意义下是公平的：未来价格的期望现值等于它的当前价格(它称为鞅(martingale)假设)．

参考文献

[1] Efron, B., and R. Tibshirani(1993). *An Introduction to the Bootstrap*. New York: Chapman and Hall.

[2] Fama, Eugene(1965). "The Behavior of Stock Market Prices." *Journal of Business* 38: 34—105.

[3] Malkiel, Burton G. (1990). *A Random Walk Down Wall Street*. New York: Norton.

[4] Niederhoffer, Victor(1966). "A New Look at Clustering of Stock Prices." *Journal of Business* 39: 309—13.

275

表 14-5 最近月期原油数据(美元)

日期	价格	对数差	日期	价格	对数差
95/1/3	17.44		95/2/27	18.66	−0.001 606 43
95/1/4	17.48	0.002 290 95	95/2/28	18.49	−0.009 152 15
95/1/5	17.72	0.013 636 6	95/3/1	18.32	−0.009 236 69
95/1/6	17.67	−0.002 825 66	95/3/2	18.35	0.001 636 22
95/1/9	17.4	−0.015 398 1	95/3/3	18.63	0.015 143 6
95/1/10	17.37	−0.001 725 63	95/3/6	18.59	−0.002 149 38
95/1/11	17.72	0.019 949 4	95/3/7	18.63	0.002 149 38
95/1/12	17.72	0	95/3/8	18.33	−0.016 234 1
95/1/13	17.52	−0.011 350 9	95/3/9	18.02	−0.017 056 8
95/1/16	17.88	0.020 339 7	95/3/10	17.91	−0.006 123 04
95/1/17	18.32	0.024 310 6	95/3/13	18.19	0.015 512 8
95/1/18	18.73	0.022 133 2	95/3/14	17.94	−0.013 839 1
95/1/19	18.69	−0.002 137 89	95/3/15	18.11	0.009 431 42
95/1/20	18.65	−0.002 142 48	95/3/16	18.16	0.002 757 1
95/1/23	18.1	−0.029 934 2	95/3/17	18.26	0.005 491 5
95/1/24	18.39	0.015 895 1	95/3/20	18.56	0.016 295 9
95/1/25	18.39	0	95/3/21	18.43	−0.007 028 96
95/1/26	18.24	−0.008 190 05	95/3/22	18.96	0.028 351 7
95/1/27	17.95	−0.016 026 9	95/3/23	18.92	−0.002 111 93
95/1/30	18.09	0.007 769 18	95/3/24	18.78	−0.007 427 09
95/1/31	18.39	0.016 447 7	95/3/27	19.07	0.015 323 9
95/2/1	18.52	0.007 044 19	95/3/28	19.05	−0.001 049 32
95/2/2	18.54	0.001 079 33	95/3/29	19.22	0.008 884 3
95/2/3	18.78	0.012 861 9	95/3/30	19.15	−0.003 648 69
95/2/6	18.59	−0.010 168 7	95/3/31	19.17	0.001 043 84
95/2/7	18.46	−0.007 017 57	95/4/3	19.03	−0.007 329 88
95/2/8	18.3	−0.008 705 17	95/4/4	19.18	0.007 851 39
95/2/9	18.24	−0.003 284 08	95/4/5	19.56	0.019 618 6
95/2/10	18.46	0.011 989 2	95/4/6	19.77	0.010 679
95/2/13	18.27	−0.010 345 9	95/4/7	19.67	−0.005 071
95/2/14	18.32	0.002 732 99	95/4/10	19.59	−0.004 075 4
95/2/15	18.42	0.005 443 67	95/4/11	19.88	0.014 695
95/2/16	18.59	0.009 186 77	95/4/12	19.55	−0.016 738 9
95/2/17	18.91	0.017 067 1	95/4/13	19.15	−0.020 672 6
	18.91	0	95/4/17	19.15	0
95/2/21	18.86	−0.002 647 61	95/4/18	19.73	0.029 837 6
95/2/22	18.63	−0.012 270 1	95/4/19	20.05	0.016 088 8
95/2/23	18.43	−0.010 793 4	95/4/20	20.41	0.017 795 8
95/2/24	18.69	0.014 008 8	95/4/21	20.52	0.005 375 04

（续）

日期	价格	对数差	日期	价格	对数差
95/4/24	20.41	−0.005 375 04	95/6/15	18.94	−0.005 791 01
95/4/25	20.12	−0.014 310 6	95/6/16	18.84	−0.005 293 82
95/4/26	20.29	0.008 413 81	95/6/19	18.22	−0.033 462 4
95/4/27	20.15	−0.006 923 87	95/6/20	18.01	−0.011 592 7
95/4/28	20.43	0.013 800 1	95/6/21	17.46	−0.031 014 6
	20.38	−0.002 450 38	95/6/22	17.5	0.002 288 33
95/5/1	20.5	0.005 870 86	95/6/23	17.49	−0.000 571 592
95/5/2	20.09	−0.020 202 7	95/6/26	17.64	0.008 539 76
95/5/3	19.89	−0.010 005 1	95/6/27	17.77	0.007 342 59
95/5/4	20.29	0.019 911 1	95/6/28	17.97	0.011 192 1
95/5/5	20.33	0.001 969 47	95/6/29	17.56	−0.023 080 1
95/5/8	20.29	−0.001 969 47	95/6/30	17.4	−0.009 153 38
95/5/9	19.61	−0.034 088 5		17.4	0
95/5/10	19.75	0.007 113 85		17.4	0
95/5/11	19.41	−0.017 365 1	95/7/5	17.18	−0.012 724 3
95/5/12	19.52	0.005 651 18	95/7/6	17.37	0.010 998 7
95/5/15	19.9	0.019 280 2	95/7/7	17.14	−0.013 329 7
95/5/16	20.08	0.009 004 56	95/7/10	17.34	0.011 601 1
95/5/17	19.96	−0.005 994 02	95/7/11	17.32	−0.001 154 07
95/5/18	20	0.002 002	95/7/12	17.49	0.009 767 39
95/5/19	20.06	0.002 995 51	95/7/13	17.25	−0.013 817 1
95/5/22	19.81	−0.012 540 9	95/7/14	17.32	0.004 049 76
95/5/23	19.77	−0.002 021 22	95/7/17	17.2	−0.006 952 52
95/5/24	19.41	−0.018 377 2	95/7/18	17.35	0.008 683 12
95/5/25	19.26	−0.007 757 99	95/7/19	17.33	−0.001 153 4
95/5/26	18.69	−0.030 041 8	95/7/20	17.01	−0.018 637 7
	18.69	0	95/7/21	16.79	−0.013 017 9
95/5/30	18.78	0.004 803 85	95/7/24	16.88	0.005 346 02
95/5/31	18.89	0.005 840 21	95/7/25	16.93	0.002 957 71
95/6/1	18.9	0.000 529 241	95/7/26	17.5	0.033 113 7
95/6/2	19.14	0.012 618 5	95/7/27	17.49	−0.000 571 592
95/6/5	19.25	0.005 730 67	95/7/28	17.43	−0.003 436 43
95/6/6	19.06	−0.009 919 16	95/7/31	17.56	0.007 430 73
95/6/7	19.18	0.006 276 17	95/8/1	17.7	0.007 941 05
95/6/8	18.91	−0.014 177 2	95/8/2	17.78	0.004 509 59
95/6/9	18.8	−0.005 834 01	95/8/3	17.72	−0.003 380 28
95/6/12	18.86	0.003 186 41	95/8/4	17.71	−0.000 564 493
95/6/13	18.91	0.002 647 61	95/8/7	17.65	−0.003 393 67
95/6/14	19.05	0.007 376 22	95/8/8	17.79	0.007 900 72

（续）

日期	价格	对数差	日期	价格	对数差
95/8/9	17.78	−0.000 562 272	95/10/3	17.56	−0.004 545 46
95/8/10	17.89	0.006 167 67	95/10/4	17.3	−0.014 917 1
95/8/11	17.86	−0.001 678 32	95/10/5	16.87	−0.025 169 6
95/8/14	17.48	−0.021 506 2	95/10/6	17.03	0.009 439 6
95/8/15	17.47	−0.000 572 246	95/10/9	17.31	0.016 307 9
95/8/16	17.55	0.004 568 83	95/10/10	17.42	0.006 334 6
95/8/17	17.66	0.006 248 25	95/10/11	17.29	−0.007 490 67
95/8/18	17.87	0.011 821 1	95/10/12	17.12	−0.009 880 93
95/8/21	18.25	0.021 041 8	95/10/13	17.41	0.016 797 4
95/8/22	18.54	0.015 765 5	95/10/16	17.59	0.010 285 8
95/8/23	18	−0.029 558 8	95/10/17	17.68	0.005 103 5
95/8/24	17.86	−0.007 808 18	95/10/18	17.61	−0.003 967 13
95/8/25	17.86	0	95/10/19	17.32	−0.016 605
95/8/28	17.82	−0.002 242 15	95/10/20	17.37	0.002 882 68
95/8/29	17.82	0	95/10/23	17.21	−0.009 253 97
95/8/30	17.79	−0.001 684 92	95/10/24	17.32	0.006 371 29
95/8/31	17.84	0.002 806 63	95/10/25	17.32	0
95/9/1	18.04	0.011 148 4	95/10/26	17.58	0.014 9
	18.04	0	95/10/27	17.54	−0.002 277 91
95/9/5	18.58	0.029 494 2	95/10/30	17.62	0.004 550 63
95/9/6	18.36	−0.011 911 3	95/10/31	17.64	0.001 134 43
95/9/7	18.27	−0.004 914 01	95/11/1	17.74	0.005 652 93
95/9/8	18.44	0.009 261 85	95/11/2	17.98	0.013 438 1
95/9/11	18.47	0.001 625 58	95/11/3	17.94	−0.002 227 17
95/9/12	18.64	0.009 162 02	95/11/6	17.71	−0.012 903 4
95/9/13	18.54	−0.005 379 25	95/11/7	17.65	−0.003 393 67
95/9/14	18.85	0.016 582 4	95/11/8	17.82	0.009 585 64
95/9/15	18.92	0.003 706 65	95/11/9	17.84	0.001 121 71
95/9/18	18.93	0.000 528 402	95/11/10	17.83	−0.000 560 695
95/9/19	18.95	0.001 055 97	95/11/13	17.8	−0.001 683 97
95/9/20	18.69	−0.013 815 3	95/11/14	17.82	0.001 122 96
95/9/21	17.56	−0.062 365	95/11/15	17.93	0.006 153 87
95/9/22	17.25	−0.017 811 4	95/11/16	18.19	0.014 396 7
95/9/25	17.47	0.012 673	95/11/17	18.57	0.020 675 4
95/9/26	17.33	−0.008 046 02	95/11/20	18.06	−0.027 847 8
95/9/27	17.57	0.013 753 8	95/11/21	17.97	−0.004 995 85
95/9/28	17.76	0.010 755 8	95/11/22	17.96	−0.000 556 638
95/9/29	17.54	−0.012 464 8	95/11/23	17.96	0
95/10/2	17.64	0.005 685 06	95/11/24	17.96	0

（续）

日期	价格	对数差	日期	价格	对数差
95/11/27	18.38	0.023 116 1	96/1/19	18.94	−0.012 592
95/11/28	18.33	−0.002 724 06	96/1/22	18.62	−0.017 039 8
95/11/29	18.26	−0.003 826 19	96/1/23	18.06	−0.030 536 7
95/11/30	18.18	−0.004 390 79	96/1/24	18.28	0.012 108
95/12/1	18.43	0.013 657 7	96/1/25	17.67	−0.033 939 3
95/12/4	18.63	0.010 793 4	96/1/26	17.73	0.003 389 83
95/12/5	18.67	0.002 144 77	96/1/29	17.45	−0.015 918 5
95/12/6	18.77	0.005 341 89	96/1/30	17.56	0.006 283 94
95/12/7	18.73	−0.002 133 33	96/1/31	17.74	0.010 198 4
95/12/8	18.97	0.012 732 3	96/2/1	17.71	−0.001 692 53
95/12/11	18.66	−0.016 476 6	96/2/2	17.8	0.005 069 01
95/12/12	18.73	0.003 744 32	96/2/5	17.54	−0.014 714 5
95/12/13	19	0.014 312 5	96/2/6	17.69	0.008 515 52
95/12/14	19.11	0.005 772 78	96/2/7	17.74	0.002 822 47
95/12/15	19.51	0.020 715 4	96/2/8	17.76	0.001 126 76
95/12/18	19.67	0.008 167 48	96/2/9	17.78	0.001 125 49
95/12/19	19.12	−0.028 359 7	96/2/12	17.97	0.010 629 5
95/12/20	18.97	−0.007 876 12	96/2/13	18.91	0.050 987 2
95/12/21	18.96	−0.000 527 287	96/2/14	18.96	0.002 640 61
95/12/22	19.14	0.009 448 89	96/2/15	19.04	0.004 210 53
95/12/25	19.14	0	96/2/16	19.16	0.006 282 74
95/12/26	19.27	0.006 769 1	96/2/19	19.16	0
95/12/27	19.5	0.011 865	96/2/20	21.05	0.094 075 8
95/12/28	19.36	−0.007 205 38	96/2/21	19.71	−0.065 774 4
95/12/29	19.55	0.009 766 2	96/2/22	19.85	0.007 077 89
96/1/1	19.55	0	96/2/23	19.06	−0.040 612 1
96/1/2	19.81	0.013 211 6	96/2/26	19.39	0.017 165 6
96/1/3	19.89	0.004 030 23	96/2/27	19.7	0.015 861 2
96/1/4	19.91	0.001 005 03	96/2/28	19.29	−0.021 031 8
96/1/5	20.26	0.017 426 4	96/2/29	19.54	0.012 876 8
96/1/8	20.26	0	96/3/1	19.44	−0.005 130 85
96/1/9	19.95	−0.015 419 4	96/3/4	19.2	−0.012 422 5
96/1/10	19.67	−0.014 134 5	96/3/5	19.54	0.017 553 4
96/1/11	18.79	−0.045 769 8	96/3/6	20.19	0.032 723 8
96/1/12	18.25	−0.029 159 7	96/3/7	19.81	−0.019 000 6
96/1/15	18.38	0.007 098 04	96/3/8	19.61	−0.010 147 2
96/1/16	18.05	−0.018 117 4	96/3/11	19.91	0.015 182 5
96/1/17	18.52	0.025 705 5	96/3/12	20.46	0.027 249 6
96/1/18	19.18	0.035 016 8	96/3/13	20.58	0.005 847 97

（续）

日期	价格	对数差	日期	价格	对数差
96/3/14	21.16	0.027 792 9	96/5/8	21	−0.005 224 42
96/3/15	21.99	0.038 475 2	96/5/9	20.68	−0.015 355 4
96/3/18	23.27	0.056 577 2	96/5/10	21.01	0.015 831 5
96/3/19	24.34	0.044 956 1	96/5/13	21.36	0.016 521 5
96/3/20	23.06	−0.054 021 6	96/5/14	21.42	0.002 805 05
96/3/21	21.05	−0.091 199	96/5/15	21.48	0.002 797 2
96/3/22	21.95	0.041 866 6	96/5/16	20.78	−0.033 131 3
96/3/25	22.4	0.020 293 8	96/5/17	20.64	−0.006 760 05
96/3/26	22.19	−0.009 419 22	96/5/20	22.48	0.085 395 1
96/3/27	21.79	−0.018 190 6	96/5/21	22.65	0.007 533 83
96/3/28	21.41	−0.017 593	96/5/22	21.4	−0.056 768 9
96/3/29	21.47	0.002 798 51	96/5/23	21.23	−0.007 975 65
96/4/1	22.26	0.036 134 7	96/5/24	21.32	0.004 230 32
96/4/2	22.7	0.019 573 6		21.32	0
96/4/3	22.27	−0.019 124 4	96/5/28	21.11	−0.009 898 74
96/4/4	22.75	0.021 324 7	96/5/29	20.76	−0.016 718 8
96/4/5	22.75	0	96/5/30	19.94	−0.040 300 3
96/4/8	23.03	0.012 232 6	96/5/31	19.76	−0.009 068 07
96/4/9	23.06	0.001 301 8	96/6/3	19.85	0.004 544 31
96/4/10	24.21	0.048 666 3	96/6/4	20.44	0.029 289 8
96/4/11	25.34	0.045 618 4	96/6/5	19.72	−0.035 860 4
96/4/12	24.29	−0.042 319 4	96/6/6	20.05	0.016 595 8
96/4/15	25.06	0.031 208 2	96/6/7	20.28	0.011 406
96/4/16	24.47	−0.023 825 1	96/6/10	20.25	−0.001 480 39
96/4/17	24.67	0.008 140 05	96/6/11	20.1	−0.007 434 98
96/4/18	23.82	−0.035 062 4	96/6/12	20.09	−0.000 497 636
96/4/19	23.95	0.005 442 76	96/6/13	20.01	−0.003 990 03
96/4/22	24.07	0.004 997 93	96/6/14	20.34	0.016 357 2
96/4/23	22.7	−0.058 601 3	96/6/17	22.14	0.084 796 5
96/4/24	22.4	−0.013 304	96/6/18	21.46	−0.031 195 2
96/4/25	22.2	−0.008 968 67	96/6/19	20.76	−0.033 162 7
96/4/26	22.32	0.005 390 85	96/6/20	20.65	−0.005 312 74
96/4/29	22.43	0.004 916 21	96/6/21	19.92	−0.035 991 1
96/4/30	21.2	−0.056 398 2	96/6/24	19.98	0.003 007 52
96/5/1	20.81	−0.018 567 5	96/6/25	19.96	−0.001 001 5
96/5/2	20.86	0.002 399 81	96/6/26	20.65	0.033 985
96/5/3	21.18	0.015 223 9	96/6/27	21.02	0.017 759
96/5/6	21.04	−0.006 631 95	96/6/28	20.92	−0.004 768 73
96/5/7	21.11	0.003 321 47	96/7/1	21.53	0.028 741 7

（续）

日期	价格	对数差	日期	价格	对数差
96/7/2	21.13	−0.018 753 5	96/8/26	21.62	−0.015 603 8
96/7/3	21.21	0.003 778 94	96/8/27	21.56	−0.002 779 07
96/7/4	21.21	0	96/8/28	21.71	0.006 933 24
96/7/5	21.21	0	96/8/29	22.15	0.020 064 5
96/7/8	21.27	0.002 824 86	96/8/30	22.25	0.004 504 51
96/7/9	21.41	0.006 560 47	96/9/2	22.25	0
96/7/10	21.55	0.006 517 71	96/9/3	23.4	0.050 394
96/7/11	21.95	0.018 391 3	96/9/4	23.24	−0.006 861 09
96/7/12	21.9	−0.002 280 5	96/9/5	23.44	0.008 569 03
96/7/15	22.48	0.026 139 4	96/9/6	23.85	0.017 340 3
96/7/16	22.38	−0.004 458 32	96/9/9	23.73	−0.005 044 15
96/7/17	21.8	−0.026 257 7	96/9/10	24.12	0.016 301 3
96/7/18	21.68	−0.005 519 79	96/9/11	24.75	0.025 784 1
96/7/19	21	−0.031 867 7	96/9/12	25	0.010 050 3
96/7/22	21.4	0.018 868 5	96/9/13	24.51	−0.019 794 6
96/7/23	21.01	−0.018 392 4	96/9/16	23.19	−0.055 36
96/7/24	20.68	−0.015 831 5	96/9/17	23.31	0.005 161 3
96/7/25	20.74	0.002 897 15	96/9/18	23.89	0.024 577 5
96/7/26	20.11	−0.030 847	96/9/19	23.54	−0.014 758 9
96/7/29	20.28	0.008 417 97	96/9/20	23.63	0.003 815 99
96/7/30	20.33	0.002 462 45	96/9/23	23.37	−0.011 063 9
96/7/31	20.42	0.004 417 19	96/9/24	24.07	0.029 513 1
96/8/1	21.04	0.029 910 6	96/9/25	24.46	0.016 072 9
96/8/2	21.34	0.014 157 9	96/9/26	24.16	−0.012 340 8
96/8/5	21.23	−0.005 167 97	96/9/27	24.6	0.018 048 1
96/8/6	21.13	−0.004 721 44	96/9/30	24.38	−0.008 983 22
96/8/7	21.42	0.013 631 2	96/10/1	24.14	−0.009 892 91
96/8/8	21.55	0.006 050 75	96/10/2	24.05	−0.003 735 22
96/8/9	21.57	0.000 927 644	96/10/3	24.81	0.031 111 8
96/8/12	22.22	0.029 689 3	96/10/4	24.73	−0.003 229 72
96/8/13	22.37	0.006 727 99	96/10/7	25.24	0.020 413
96/8/14	22.12	−0.011 238 6	96/10/8	25.54	0.011 815 8
96/8/15	21.9	−0.009 995 54	96/10/9	25.07	−0.018 573 9
96/8/16	22.66	0.034 114 6	96/10/10	24.26	−0.032 843
96/8/19	23.26	0.026 133 9	96/10/11	24.66	0.016 353 6
96/8/20	22.86	−0.017 346 5	96/10/14	25.62	0.038 190 8
96/8/21	21.72	−0.051 155 2	96/10/15	25.42	−0.007 837 03
96/8/22	22.3	0.026 353 2	96/10/16	25.17	−0.009 883 46
96/8/23	21.96	−0.015 364 1	96/10/17	25.42	0.009 883 46

（续）

日期	价格	对数差	日期	价格	对数差
96/10/18	25.75	0.012 898 4	96/12/12	23.72	0.014 437 6
96/10/21	25.92	0.006 580 24	96/12/13	24.47	0.031 129 3
96/10/22	25.75	−0.006 580 24	96/12/16	25.74	0.050 598 3
96/10/23	24.86	−0.035 174 5	96/12/17	25.71	−0.001 166 18
96/10/24	24.51	−0.014 178 9	96/12/18	26.16	0.017 351 5
96/10/25	24.86	0.014 178 9	96/12/19	26.57	0.015 551 2
96/10/28	24.85	−0.000 402 334	96/12/20	25.08	−0.057 712
96/10/29	24.34	−0.020 736 7	96/12/23	24.79	−0.011 630 4
96/10/30	24.28	−0.002 468 12	96/12/24	25.1	0.012 427 5
96/10/31	23.35	−0.039 056	96/12/25	25.1	0
96/11/1	23.03	−0.013 799 3	96/12/26	24.92	−0.007 197 15
96/11/4	22.79	−0.010 475 9	96/12/27	25.22	0.011 966 6
96/11/5	22.64	−0.006 603 59	96/12/30	25.37	0.005 930 04
96/11/6	22.69	0.002 206 05	96/12/31	25.92	0.021 447 5
96/11/7	22.74	0.002 201 19		25.92	0
96/11/8	23.59	0.036 697 4	97/1/2	25.69	−0.008 913 06
96/11/11	23.37	−0.009 369 74	97/1/3	25.59	−0.003 900 16
96/11/12	23.35	−0.000 856 164	97/1/6	26.37	0.030 025 4
96/11/13	24.12	0.032 444 4	97/1/7	26.23	−0.005 323 21
96/11/14	24.41	0.011 951 5	97/1/8	26.62	0.014 759
96/11/15	24.17	−0.009 880 69	97/1/9	26.37	−0.009 435 81
96/11/18	23.88	−0.012 070 9	97/1/10	26.09	−0.010 674 9
96/11/19	24.49	0.025 223 6	97/1/13	25.19	−0.035 105
96/11/20	23.76	−0.030 261 4	97/1/14	25.11	−0.003 180 92
96/11/21	23.84	0.003 361 35	97/1/15	25.95	0.032 905 4
96/11/22	23.75	−0.003 782 31	97/1/16	25.52	−0.016 707 2
96/11/25	23.49	−0.011 007 7	97/1/17	25.41	−0.004 319 66
96/11/26	23.62	0.005 519 01	97/1/20	25.23	−0.007 109 03
96/11/27	23.75	0.005 488 72	97/1/21	24.8	−0.017 190 1
96/11/28	23.75	0	97/1/22	24.24	−0.022 839 5
96/11/29	23.75	0	97/1/23	24.18	−0.002 478 32
96/12/2	24.8	0.043 261 1	97/1/24	24.05	−0.005 390 85
96/12/3	24.93	0.005 228 24	97/1/27	23.94	−0.004 584 3
96/12/4	24.8	−0.005 228 24	97/1/28	23.9	−0.001 672 24
96/12/5	25.58	0.030 967 1	97/1/29	24.47	0.023 569 4
	25.62	0.001 562 5	97/1/30	24.87	0.016 214 4
96/12/9	25.3	−0.012 568 9	97/1/31	24.15	−0.029 377 9
96/12/10	24.42	−0.035 401 9	97/2/3	24.15	0
96/12/11	23.38	−0.043 521 5	97/2/4	24.02	−0.005 397 56

（续）

日期	价格	对数差	日期	价格	对数差
97/2/5	23.91	−0.004 590 04	97/4/1	20.28	−0.006 389 8
97/2/6	23.1	−0.034 464 2	97/4/2	19.47	−0.040 760 4
97/2/7	22.23	−0.038 389 9	97/4/3	19.47	0
97/2/10	22.46	0.010 293 2	97/4/4	19.12	−0.018 139 9
97/2/11	22.42	−0.001 782 53	97/4/7	19.23	0.005 736 65
97/2/12	21.86	−0.025 294 9	97/4/8	19.35	0.006 220 86
97/2/13	22.02	0.007 292 65	97/4/9	19.27	−0.004 142 94
97/2/14	22.41	0.017 556 2	97/4/10	19.57	0.015 448 3
97/2/17	22.41	0	97/4/11	19.53	−0.002 046 04
97/2/18	22.52	0.004 896 52	97/4/14	19.9	0.018 768
97/2/19	22.79	0.011 918	97/4/15	19.83	−0.003 523 79
97/2/20	21.98	−0.036 188 9	97/4/16	19.35	−0.024 503 5
97/2/21	21.39	−0.027 209 4	97/4/17	19.42	0.003 611 04
97/2/24	20.71	−0.032 306 8	97/4/18	19.91	0.024 918 7
97/2/25	21	0.013 905 8	97/4/21	20.38	0.023 331 9
97/2/26	21.11	0.005 224 42	97/4/22	19.6	−0.039 024 5
97/2/27	20.89	−0.010 476 3	97/4/23	19.73	0.006 610 75
97/2/28	20.3	−0.028 649 7	97/4/24	20.03	0.015 090 8
97/3/3	20.25	−0.002 466 09	97/4/25	19.99	−0.001 999
97/3/4	20.66	0.020 044 7	97/4/28	19.91	−0.004 010 03
97/3/5	20.49	−0.008 262 5	97/4/29	20.44	0.026 271 6
97/3/6	20.94	0.021 724 2	97/4/30	20.21	−0.011 316 2
97/3/7	21.28	0.016 106 5	97/5/1	19.91	−0.014 955 4
97/3/10	20.49	−0.037 830 7	97/5/2	19.6	−0.015 692 6
97/3/11	20.11	−0.018 719 8	97/5/5	19.63	0.001 529 44
97/3/12	20.62	0.025 044 3	97/5/6	19.66	0.001 527 11
97/3/13	20.7	0.003 872 22	97/5/7	19.62	−0.002 036 66
97/3/14	21.29	0.028 103 8	97/5/8	20.34	0.036 039 9
97/3/17	20.92	−0.017 531 8	97/5/9	20.43	0.004 415 02
97/3/18	22.06	0.053 060 4	97/5/12	21.38	0.045 451 5
97/3/19	22.04	−0.000 907 03	97/5/13	21.37	−0.000 467 836
97/3/20	22.32	0.012 624 2	97/5/14	21.39	0.000 935 454
97/3/21	21.51	−0.036 965 2	97/5/15	21.3	−0.004 216 45
97/3/24	21.06	−0.021 142 4	97/5/16	22.12	0.037 775 1
97/3/25	20.99	−0.003 329 37	97/5/19	21.59	−0.024 251 9
97/3/26	20.64	−0.016 815 2	97/5/20	21.19	−0.018 700 9
97/3/27	20.7	0.002 902 76	97/5/21	21.86	0.031 129 1
97/3/28	20.7	0	97/5/22	21.86	0
97/3/31	20.41	−0.014 108 7	97/5/23	21.63	−0.010 577 2

（续）

日期	价格	对数差	日期	价格	对数差
97/5/26	21.63	0	97/7/18	19.27	−0.036 682 7
97/5/27	20.79	−0.039 609 1	97/7/21	19.18	−0.004 681 41
97/5/28	20.79	0	97/7/22	19.08	−0.005 227 4
97/5/29	20.97	0.008 620 74	97/7/23	19.63	0.028 418 3
97/5/30	20.88	−0.004 301 08	97/7/24	19.77	0.007 106 63
97/6/2	21.12	0.011 428 7	97/7/25	19.89	0.006 051 46
97/6/3	20.33	−0.038 122 8	97/7/28	19.81	−0.004 030 23
97/6/4	20.12	−0.010 383 3	97/7/29	19.85	0.002 017 15
97/6/5	19.66	−0.023 128 2	97/7/30	20.3	0.022 416 9
97/6/6	18.79	−0.045 261 3	97/7/31	20.14	−0.007 913
97/6/9	18.68	−0.005 871 38	97/8/1	20.28	0.006 927 29
97/6/10	18.67	−0.000 535 475	97/8/4	20.75	0.022 911 1
97/6/11	18.53	−0.007 526 92	97/8/5	20.81	0.002 887 39
97/6/12	18.69	0.008 597 58	97/8/6	20.46	−0.016 961 9
97/6/13	18.83	0.007 462 72	97/8/7	20.09	−0.018 249 6
97/6/16	19.01	0.009 513 81	97/8/8	19.54	−0.027 758 5
97/6/17	19.23	0.011 506 4	97/8/11	19.69	0.007 647 25
97/6/18	18.79	−0.023 146 7	97/8/12	19.99	0.015 121 3
97/6/19	18.67	−0.006 406 86	97/8/13	20.19	0.009 955 28
97/6/20	18.55	−0.006 448 17	97/8/14	20.08	−0.005 463 14
97/6/23	19.14	0.031 310 6	97/8/15	20.07	−0.000 498 132
97/6/24	19.03	−0.005 763 7	97/8/18	19.91	−0.008 004 04
97/6/25	19.52	0.025 422 9	97/8/19	20.12	0.010 492 2
97/6/26	19.09	−0.022 274 9	97/8/20	20.06	−0.002 986 56
97/6/27	19.46	0.019 196 4	97/8/21	19.66	−0.020 141 7
97/6/30	19.8	0.017 320 9	97/8/22	19.7	0.002 032 52
97/7/1	20.12	0.016 032 4	97/8/25	19.26	−0.022 588 2
97/7/2	20.34	0.010 875	97/8/26	19.28	0.001 037 88
97/7/3	19.56	−0.039 102 7	97/8/27	19.73	0.023 072
97/7/4	19.56	0	97/8/28	19.58	−0.007 631 68
97/7/7	19.52	−0.002 047 08	97/8/29	19.61	0.001 531
97/7/8	19.73	0.010 700 7	97/9/1	19.61	0
97/7/9	19.46	−0.013 779 2	97/9/2	19.65	0.002 037 7
97/7/10	19.22	−0.012 409 7	97/9/3	19.61	−0.002 037 7
97/7/11	19.33	0.005 706 89	97/9/4	19.4	−0.010 766 6
97/7/14	18.99	−0.017 745 8	97/9/5	19.63	0.011 785 9
97/7/15	19.67	0.035 182 1	97/9/8	19.45	−0.009 211 94
97/7/16	19.65	−0.001 017 29	97/9/9	19.42	−0.001 543 61
97/7/17	19.99	0.017 154 8	97/9/10	19.42	0

（续）

日期	价格	对数差	日期	价格	对数差
97/9/11	19.37	−0.002 577 99	97/10/16	20.97	0.019 259 1
97/9/12	19.32	−0.002 584 65	97/10/17	20.59	−0.018 287 3
97/9/15	19.27	−0.002 591 35	97/10/20	20.7	0.005 328 18
97/9/16	19.61	0.017 490 2	97/10/21	20.67	−0.001 450 33
97/9/17	19.42	−0.009 736 18	97/10/22	21.42	0.035 641 7
97/9/18	19.38	−0.002 061 86	97/10/23	21.09	−0.015 526 1
97/9/19	19.35	−0.001 549 19	97/10/24	20.97	−0.005 706 15
97/9/22	19.6	0.012 837 1	97/10/27	21.07	0.004 757 38
97/9/23	19.79	0.009 647 19	97/10/28	20.46	−0.029 378 5
97/9/24	19.94	0.007 551	97/10/29	20.71	0.012 144 9
97/9/25	20.39	0.022 316 8	97/10/30	21.22	0.024 327 5
97/9/26	20.87	0.023 268 1	97/10/31	21.08	−0.006 619 41
97/9/29	21.26	0.018 514 7	97/11/3	20.96	−0.005 708 86
97/9/30	21.18	−0.003 770 03	97/11/4	20.7	−0.012 482 2
97/10/1	21.05	−0.006 156 78	97/11/5	20.31	−0.019 020 3
97/10/2	21.77	0.033 632 3	97/11/6	20.39	0.003 931 21
97/10/3	22.76	0.044 471 7	97/11/7	20.77	0.018 465 1
97/10/6	21.93	−0.037 149	97/11/10	20.4	−0.017 974 7
97/10/7	21.96	0.001 367 05	97/11/11	20.51	0.005 377 67
97/10/8	22.18	0.009 968 37	97/11/12	20.49	−0.000 975 61
97/10/9	22.12	−0.002 708 81	97/11/13	20.7	0.010 196 7
97/10/10	22.1	−0.000 904 568	97/11/14	21	0.014 388 7
97/10/13	21.32	−0.035 932	97/11/17	20.26	−0.035 873 9
97/10/14	20.7	−0.029 511 9	97/11/18	20.04	−0.010 918 2
97/10/15	20.57	−0.006 3	97/11/19	19.8	−0.012 048 3

276～284

第15章　自回归模型和均值回复

15.1　自回归模型

令 $S_d(n)$ 表示证券第 n 天结束时的价格．如果我们令

$$L(n) = \log(S_d(n)),$$

那么几何布朗运动模型意味着

$$L(n) = a + L(n-1) + e(n), \tag{15-1}$$

其中 $e(n)$，$n \geqslant 1$，是一个独立同分布随机变量序列，它们是均值为 0，方差为 σ^2/N（$N=252$ 是一年之中交易日总天数）的正态分布，且 $a=\mu/N$．与以前一样，μ 是几何布朗运动的期望（或者漂移）参数，σ 是波动参数.

考察式(15-1)，很自然地会考虑将 $L(n)$ 推广为一个更一般的方程，即下面的线性回归方程

$$L(n) = a + bL(n-1) + e(n), \tag{15-2}$$

其中 b 是另一个常数，它的值待估计．亦即，代替取 $b=1$，我们将利用数据来决定 b，从而获得一个改进模型．式(15-2)是一个经典线性回归模型，估计 a，b 和 σ 的方法是熟知的．由于在式(15-2)的线性回归模型中，时刻 n 的对数价格是由上一个时间段的对数价格来表示的，所以它被称为一阶自回归模型.

由式(15-2)给出的自回归模型中的参数 a 和 b，可以依照下面的方法用历史数据来估计．假设 $L(0)$，$L(1)$，…，$L(r)$是连续 r 天证券收盘价的对数．那么，当已知 a 和 b 时，按照此前对数价格预测的 $L(i)$值是 $a+bL(i-1)$；因此，通常估计 a 和 b 的方法是，令它们等于使预测误差平方和最小的那些值．也就是说，选择适当的 a 和 b，使得

285

$$\sum_{i=1}^{r}(L(i) - a - bL(i-1))^2$$

达到最小．现在有很多标准统计软件包可以用来计算这种最小值以及估计 σ 的值.

注　仅当 $a=(r-\sigma^2/2)/N$ 并且 $b=1$ 时，由式(15-2)给出的模型才是一个风险中性模型．也就是说，只有该模型为一个风险中性几何布朗运动时它才是风险中性的．因此，当 $a=(r-\sigma^2/2)/N$ 并且 $b=1$ 时，如果所有的投资都按照它们期望值的现值定价，那么就不可能存在套利机会．然而，如果投资者认为 a 和 b 还能取其他的值，就能够进行这样的投资：只要根据投资者对 a 和 b 的估计值来计算上面这些量，尽管不能确保获利，但是可以产生一个期望值很大而方差很小的收益．

15.2 用期望收益估计期权价值

假设每天的收盘价格对数服从式(15-2)，而且已经估计出来参数 a，b 和 σ. 考虑一个期权，它的到期日是第 n 个交易日. 为了估计这个期权的回报期望值，必须首先确定 $L(n)$的概率分布. 为完成这项工作，先把式(15-2)重新写成下面的形式

$$L(i) = e(i) + a + bL(i-1).$$

现在，连续使用上面的等式：首先是 $i=n$，然后是 $i=n-1$，等等，得到

$$\begin{aligned}L(n) &= e(n) + a + bL(n-1)\\ &= e(n) + a + b[e(n-1) + a + bL(n-2)]\\ &= e(n) + be(n-1) + a + ab + b^2 L(n-2)\\ &= e(n) + be(n-1) + a + ab + b^2[e(n-2) + a + bL(n-3)]\\ &= e(n) + be(n-1) + b^2 e(n-2) + a + ab + ab^2 + b^3 L(n-3).\end{aligned}$$

286

如此继续下去，对于任意的 $k<n$，有

$$L(n) = \sum_{i=0}^{k} b^i e(n-i) + a\sum_{i=0}^{k} b^i + b^{k+1}L(n-k-1).$$

在上面的等式中取 $k=n-1$ 得到

$$\begin{aligned}L(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} b^i e(n-i) + a\sum_{i=0}^{n-1} b^i + b^n L(0)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} b^i e(n-i) + \frac{a(1-b^n)}{1-b} + b^n L(0).\end{aligned} \tag{15-3}$$

注意到 $b^i e(n-i)$是均值为 0，方差是 $b^{2i}\sigma^2/N$ 的正态随机变量. 由于相互独立正态随机变量的和仍然是一个正态随机变量，所以 $\sum_{i=0}^{n-1} b^i e(n-i)$ 也是一个正态随机变量，它的期望是

$$E\Big[\sum_{i=0}^{n-1} b^i e(n-i)\Big] = \sum_{i=0}^{n-1} b^i E[e(n-i)] = 0, \tag{15-4}$$

方差是

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\Big[\sum_{i=0}^{n-1} b^i e(n-i)\Big] &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Var}[b^i e(n-i)]\\ &= \frac{\sigma^2}{N}\sum_{i=0}^{n-1} b^{2i}\\ &= \frac{\sigma^2(1-b^{2n})}{N(1-b^2)}.\end{aligned} \tag{15-5}$$

因此，由式(15-3)、式(15-4)和式(15-5)，如果在 0 时刻的对数价格是 $L(0)=g$，

那么 $L(n)$ 是一个均值为 $m(n)$，方差是 $v(n)$ 的正态随机变量，这里

$$m(n) = \frac{a(1-b^n)}{1-b} + b^n g \tag{15-6}$$

且

$$v(n) = \frac{\sigma^2(1-b^{2n})}{N(1-b^2)}. \tag{15-7}$$

287

一个看涨期权（执行价是 K，到期日是第 n 个交易日）支付的现值是

$$e^{-rn/N}(S_d(n)-K)^+ = e^{-rn/N}(e^{L(n)}-K)^+,$$

其中 r 和 N（分别）是利率和一年中的交易天数. 因为 $L(n)$ 是一个正态随机变量，它的均值和方差由式(15-6)和式(15-7)给出，可以证明这个回报的期望值是

$$\begin{aligned} &E[e^{-rn/N}(e^{L(n)}-K)^+] \\ &= e^{-rn/N}\left(e^{m(n)+v(n)/2}\Phi(\sqrt{v(n)}-h) - K\Phi(-h)\right), \end{aligned} \tag{15-8}$$

其中 Φ 是标准正态分布函数，而

$$h = \frac{\log(K)-m(n)}{\sqrt{v(n)}}.$$

例 15.2a 假设自回归模型适用于第 14 章的原油数据，从标准统计包得到的 a，b 和 $\sigma/\sqrt{N}$ 的估计值是

$$a = 0.0487, \quad b = 0.9838, \quad \sigma/\sqrt{N} = 0.01908.$$

即估计自回归方程是

$$L(n) = 0.0487 + 0.9838L(n-1) + e(n),$$

其中 $e(n)$ 是一个期望为 0，标准差是 0.019 08 的正态随机变量. 因此，如果现在的价格是 20，那么再过 50 个交易日后，在该天结束时价格的对数也是一个正态随机变量，它的期望是

$$m(50) = \frac{0.0487(1-(0.9838)^{50})}{1-0.9838} + \log(20)(0.9838)^{50} = 3.0016,$$

方差是

$$v(50) = (0.0191)^2\frac{1-(0.9838)^{100}}{1-(0.9838)^2} = 0.0091.$$

假设现在的利率是 8%，对一个在 50 个交易日后以执行价 $K=21$ 购买的该证券期权，求它的回报的期望现值. 因为

288

$$h = \frac{\log(21)-3.0016}{\sqrt{0.0091}} = 0.4499,$$

所以根据式(15-8)，期望回报的当前价值是

$$e^{-0.08(50)/252}(20.209\,4\Phi(-0.354\,5)-21\Phi(-0.449\,9))=0.444\,2.$$

即回报的期望现值是 44.42 美分.

把上面的结果与几何布朗运动 Black-Scholes 期权价格相比较是很有趣的. 利用 7.2 节中的记号，原油价格数据集可产生下面波动参数的估计值

$$\sigma=0.303\,2 \quad (\sigma/\sqrt{N}=0.019\,10).$$

由于它给出了 $\omega=-0.176\,2$ 和 $\sigma\sqrt{t}=0.135\,1$，因此由 Black-Scholes 公式得到的价格是

$$C=20\Phi(-0.176\,2)-21e^{-4/252}\Phi(-0.311\,3)=0.791\,1.$$

由此可见几何布朗运动的风险中性价格 79 美分要比假设是自回归模型时的期望支付现值 44 美分大得多. 产生这个差异的一个主要原因是，在风险中性几何布朗运动模型下最后的价格对数的方差是 0.018 24，而在自回归模型中这个方差是 0.009 1.（在到期时价格对数的期望则是几乎相等的：在风险中性几何布朗运动模型下它是 3.002 5，而在自回归模型下是 3.001 6.）

还可做些别的比较. 通过模拟曾得到下述结果：当用样本均值来作为漂移参数的估计量时，在第 14 章的模型下，期权回报的期望现值是 64 美分，而使用风险中性方法得到的是 81 美分. □

15.3 均值回复

许多交易商认为，某些证券(通常还有商品)的价格倾向于回复到某个固定的值. 也就是说，当价格比该值小时，会有上升的趋势；而当价格比它大时，就会有下降的倾向. 尽管这个称为*均值回复*的现象不能用几何布朗运动模型来解释，但它却是自回归模型的一个非常简单的推论. 比如考虑模型

289

$$L(n)=a+bL(n-1)+e(n),$$

它等价于

$$S_d(n)=e^{a+e(n)}(S_d(n-1))^b.$$

因为

$$E[e^{a+e(n)}]=e^{a+\sigma^2/2N},$$

所以，如果在第 $n-1$ 天结束时证券的价格是 s，那么在下一天结束时证券的期望价格就是

$$E[S_d(n)]=e^{a+\sigma^2/2N}s^b. \tag{15-9}$$

由于假设了 $0<b<1$，故令

$$s^*=\exp\left\{\frac{a+\sigma^2/2N}{1-b}\right\}.$$

下面将证明，如果当前价格是 s，那么第二天结束时的期望价格会在 s 和 s^* 之间.

为了证明此结果，首先假设 $s<s^*$，也就是说，

$$s < \exp\left\{\frac{a+\sigma^2/2N}{1-b}\right\}, \tag{15-10}$$

这就意味着

$$s^{1-b} < \exp\{a+\sigma^2/2N\}$$

或者

$$s < \exp\{a+\sigma^2/2N\}s^b = E[S_d(n)]. \tag{15-11}$$

此外，式(15-10)也意味着

$$s^b < \exp\left\{\frac{b(a+\sigma^2/2N)}{1-b}\right\}$$

或者

$$s^b < \exp\left\{\frac{a+\sigma^2/2N}{1-b} - (a+\sigma^2/2N)\right\},$$

290

它等价于

$$E[S_d(n)] = \exp\{a+\sigma^2/2N\}s^b < \exp\left\{\frac{a+\sigma^2/2N}{1-b}\right\} = s^*. \tag{15-12}$$

因此，从式(15-11)和式(15-12)知道，如果 $S_d(n-1)=s<s^*$，那么

$$s < E[S_d(n)] < s^*.$$

用类似的方法可以得到如果 $S_d(n-1)=s>s^*$，那么

$$s^* < E[S_d(n)] < s.$$

所以，如果 $0<b<1$，那么对于当前的任何价格 s，第二天结束时的平均价格会介于 s 和 s^* 之间. 也就是说，存在一个指向价格 s^* 的均值回复.

例 15.3a　对于例 15.2a 中的数据，估值回归方程为

$$L(n) = 0.0487 + 0.9838L(n-1) + e(n),$$

其中 $e(n)$ 是一个均值是 0，标准差是 0.019 1 的正态随机变量. 因为待估计的 b 值小于 1，这个模型预测了一个指向下面价格的均值回复：

$$s^* = \exp\left\{\frac{0.0487 + (0.0191)^2/2}{1-0.9838}\right\} = 20.44.$$ □

15.4　习题

练习 15.1　对于模型

$$L(n) = 5 + 0.8L(n-1) + e(n),$$

其中 $e(n)$ 是一个均值是 0 方差是 0.2 的正态随机变量，求 $L(n+10) > L(n)$ 的

291 概率.

练习 15.2 令 $L(n)$表示一个证券在第 n 天结束时的价格对数，并且假设

$$L(n) = 1.2 + 0.7L(n-1) + e(n),$$

其中 $e(n)$是一个均值为 0，方差是 0.1 的正态随机变量. 求当利率为 10%时，一个 60 个交易日后到期，执行价是 50 的看涨期权回报的期望现值. 设这个证券当前的价格是：a)48；b)50；c)52.

练习 15.3 对燃料油的前 100 个数据值(见表 15-1)，应用统计软件包来拟合一个自回归模型.

练习 15.4 在练习 15.2 中，证券的期望价格会回复到什么值?

练习 15.5 对于 15.3 节中的模型，证明如果 $S_d(n-1)=s>s^*$，那么

$$s^* < E[S_d(n)] < s.$$

练习 15.6 对于 15.3 节中的模型，证明如果 $S_d(n-1)=s^*$，那么

292

$$E[S_d(n)]=s^*.$$

表 15-1 最近月期商品价格(美元)

日期	无铅汽油	燃料油	日期	无铅汽油	燃料油
95/1/3	52.75	49.94	95/2/27	58.97	47.19
95/1/4	53.43	49.64	95/2/28	57.58	46.9
95/1/5	54.51	49.96	95/3/1	56.74	46.44
95/1/6	53.77	49.52	95/3/2	55.59	46.52
95/1/9	53.9	48.33	95/3/3	55.94	47.41
95/1/10	53.66	47.38	95/3/6	56.21	46.66
95/1/11	54.54	47.98	95/3/7	56.78	46.36
95/1/12	54.92	47.85	95/3/8	55.83	45.25
95/1/13	55	46.68	95/3/9	54.35	45.14
95/1/16	56.88	47.35	95/3/10	52.47	45.25
95/1/17	57.8	48.67	95/3/13	53.81	45.61
95/1/18	59.48	49.08	95/3/14	52.79	44.34
95/1/19	58.12	48.28	95/3/15	54.04	45.14
95/1/20	57.4	48.14	95/3/16	54.93	45.37
95/1/23	56.38	47.82	95/3/17	55.37	46.07
95/1/24	57.6	47.87	95/3/20	56.15	45.85
95/1/25	57.25	47.47	95/3/21	56.15	45.65
95/1/26	57.44	47.27	95/3/22	55.9	47.02
95/1/27	56.07	47.27	95/3/23	57.53	46.56
95/1/30	56.21	47.42	95/3/24	57.82	46.32
95/1/31	57.76	46.86	95/3/27	58.6	47.46
95/2/1	56.77	47.8	95/3/28	58.73	47.46
95/2/2	55.95	48.55	95/3/29	59.99	47.08
95/2/3	57.35	49.44	95/3/30	60.68	47.19
95/2/6	57.3	49.2	95/3/31	59.47	47.06
95/2/7	56.99	49.13	95/4/3	57.44	47.47
95/2/8	56.1	47.98	95/4/4	58.6	47.96
95/2/9	55.84	47.65	95/4/5	60.48	48.01
95/2/10	55.64	48.28	95/4/6	61.68	49.21
95/2/13	55.56	47.29	95/4/7	61.29	49.5
95/2/14	56.16	47.5	95/4/10	61.22	49.28
95/2/15	56.22	46.89	95/4/11	61.59	50.15
95/2/16	57.91	46.92	95/4/12	61.37	49.54
95/2/17	58.76	47.72	95/4/13	60.44	48.79
95/2/20	58.76	47.72	95/4/14	60.44	48.79
95/2/21	59.11	47.62	95/4/17	62.03	50.01
95/2/22	59.84	47.89	95/4/18	63.69	50.19
95/2/23	58.36	47.44	95/4/19	63.15	50.15
95/2/24	58.76	47.75	95/4/20	63.22	50.28

（续）

日期	无铅汽油	燃料油
95/4/21	63.2	50.64
95/4/24	62.21	50.02
95/4/25	62.91	50.78
95/4/26	63.81	50.45
95/4/27	64.96	51.26
95/4/28	65.33	51.19
95/5/1	64.15	51.09
95/5/2	63.65	50.95
95/5/3	62.55	50.25
95/5/4	63.59	51.27
95/5/5	63.99	51.34
95/5/8	64.21	51.15
95/5/9	62.56	49.14
95/5/10	63.29	49.95
95/5/11	63.28	49.09
95/5/12	63.67	49.54
95/5/15	64.9	49.86
95/5/16	66.3	50.45
95/5/17	66.76	50.4
95/5/18	66.5	50.56
95/5/19	66.34	51.01
95/5/22	66.46	51.29
95/5/23	66.15	52.29
95/5/24	64.93	51.13
95/5/25	65.81	51.25
95/5/26	64.07	48.72
95/5/29	64.07	48.72
95/5/30	63.5	48.56
95/5/31	63	48.47
95/6/1	59.78	49.53
95/6/2	60.94	49.9
95/6/5	61.79	49.6
95/6/6	61.39	49.1
95/6/7	61.77	48.95
95/6/8	60.64	48.65
95/6/9	60.8	48.1
95/6/12	61.15	48.5
95/6/13	60.93	48.53
95/6/14	62	49.19
95/6/15	61.87	48.88
95/6/16	61.5	48.29
95/6/19	60.28	47
95/6/20	60.15	47.14
95/6/21	58.73	46.54
95/6/22	58.33	46.65
95/6/23	56.98	46.31
95/6/26	56.71	46.78
95/6/27	57.38	47.23
95/6/28	59.59	47.69
95/6/29	59.01	46.92
95/6/30	59.15	46.72
95/7/3	59.15	46.72
95/7/4	59.15	46.72
95/7/5	54.37	46.51
95/7/6	54.74	47.19
95/7/7	53.8	46.37
95/7/10	54.74	47.1
95/7/11	54.19	46.96
95/7/12	54.96	47.23
95/7/13	54.39	46.68
95/7/14	54.54	46.53
95/7/17	53.98	46.49
95/7/18	53.58	46.98
95/7/19	52.69	46.47
95/7/20	52.18	46.1
95/7/21	52.05	46.14
95/7/24	53.26	46.56
95/7/25	52.37	46.51
95/7/26	52.89	48.62
95/7/27	53.69	48.13
95/7/28	53.75	48
95/7/31	54.08	48.27
95/8/1	54.35	48.79
95/8/2	54.44	49.44
95/8/3	53.93	49.24
95/8/4	53.97	49.18
95/8/7	54.05	49.32
95/8/8	54.38	49.7

（续）

日期	无铅汽油	燃料油	日期	无铅汽油	燃料油
95/8/9	54.78	49.45	95/10/3	51.93	49.28
95/8/10	55.65	49.55	95/10/4	50.74	48.85
95/8/11	55.72	49.38	95/10/5	48.89	47.97
95/8/14	55.23	48.77	95/10/6	49.15	48.21
95/8/15	54.82	48.74	95/10/9	50.24	48.74
95/8/16	53.92	49.22	95/10/10	50.33	48.67
95/8/17	54.29	49.27	95/10/11	50.48	48.8
95/8/18	54.23	49.7	95/10/12	49.86	48.46
95/8/21	54.46	50.29	95/10/13	50.29	48.92
95/8/22	54.57	50.18	95/10/16	50.7	48.85
95/8/23	55.27	50.5	95/10/17	50.33	48.82
95/8/24	55.86	50.2	95/10/18	49.88	48.42
95/8/25	55.97	49.97	95/10/19	49.36	48.15
95/8/28	55.62	49.8	95/10/20	49.7	48.58
95/8/29	55.51	49.52	95/10/23	49.81	48.94
95/8/30	56.45	49.65	95/10/24	49.87	49.36
95/8/31	56.25	50.15	95/10/25	49.69	49.58
95/9/1	54.25	51.43	95/10/26	50	50.44
95/9/4	54.25	51.43	95/10/27	50.06	50.34
95/9/5	56.23	52.97	95/10/30	50.74	50.59
95/9/6	55.32	52.11	95/10/31	50.83	50.4
95/9/7	54.55	51.44	95/11/1	50.55	50.95
95/9/8	54.79	51.83	95/11/2	51.72	52.04
95/9/11	54.92	51.65	95/11/3	51.51	51.72
95/9/12	55.74	51.95	95/11/6	51.03	51.15
95/9/13	55.34	51.25	95/11/7	51.14	50.99
95/9/14	56.81	51.8	95/11/8	51.42	51.45
95/9/15	56.63	51.53	95/11/9	51.06	51.62
95/9/18	57.73	51.65	95/11/10	50.7	51.63
95/9/19	57.23	51.37	95/11/13	50.3	51.57
95/9/20	56.39	49.3	95/11/14	50.43	51.56
95/9/21	54.87	48.67	95/11/15	51.24	51.71
95/9/22	53.49	48.09	95/11/16	51.55	52.22
95/9/25	54.01	48.85	95/11/17	52.79	52.96
95/9/26	53.79	48.23	95/11/20	52.9	52.73
95/9/27	54.55	49.02	95/11/21	53.12	52.28
95/9/28	56.05	49.5	95/11/22	54.12	52.54
95/9/29	57.67	48.65	95/11/23	54.12	52.54
95/10/2	52.78	49.26	95/11/24	54.12	52.54

（续）

日期	无铅汽油	燃料油	日期	无铅汽油	燃料油
95/11/27	55.45	53.42	96/1/19	55.41	54.22
95/11/28	56.24	52.95	96/1/22	54.88	53.67
95/11/29	57.45	52.2	96/1/23	53.66	52.95
95/11/30	57.36	51.62	96/1/24	54.2	52.72
95/12/1	53.02	52.67	96/1/25	52.67	50.51
95/12/4	53.56	54.03	96/1/26	52.97	50.93
95/12/5	54	54.22	96/1/29	52.46	51.13
95/12/6	53.89	54.75	96/1/30	53.37	52.28
95/12/7	54.06	55.28	96/1/31	54.1	53.51
95/12/8	54.65	56.59	96/2/1	53.14	52.41
95/12/11	54.69	56.75	96/2/2	53.74	53.26
95/12/12	55.58	56.81	96/2/5	52.06	51.6
95/12/13	57.55	57.69	96/2/6	52.38	51.64
95/12/14	57.86	57.3	96/2/7	52.23	52.46
95/12/15	59.59	57.99	96/2/8	52.44	53.14
95/12/18	59.93	59.11	96/2/9	52.91	53.62
95/12/19	59.26	59.23	96/2/12	53	53.69
95/12/20	57.75	59.9	96/2/13	55.11	56.74
95/12/21	56.91	60.01	96/2/14	55.2	58.21
95/12/22	57.59	60.09	96/2/15	55.44	57
95/12/25	57.59	60.09	96/2/16	55.77	56.87
95/12/26	58.69	60.5	96/2/19	55.77	56.87
95/12/27	60.26	62.33	96/2/20	57.71	56.39
95/12/28	59.28	60.32	96/2/21	59.45	58.84
95/12/29	58.6	58.63	96/2/22	60.04	60.53
96/1/1	58.6	58.63	96/2/23	58.73	60.66
96/1/2	59.09	59.93	96/2/26	59.76	62.85
96/1/3	58.74	59.44	96/2/27	60.31	64.28
96/1/4	59.44	59.28	96/2/28	59.46	59.68
96/1/5	60.48	60.64	96/2/29	59.35	61.81
96/1/8	60.48	60.64	96/3/1	59.75	53.42
96/1/9	59.65	60.43	96/3/4	58.73	52.15
96/1/10	58.19	59.59	96/3/5	59.09	53
96/1/11	54.44	56.16	96/3/6	59.75	54.22
96/1/12	53.1	53.57	96/3/7	59.18	53.78
96/1/15	53.9	53.3	96/3/8	58.75	53.44
96/1/16	53.33	52.43	96/3/11	59.32	55.15
96/1/17	54.98	53.13	96/3/12	60.56	54.83
96/1/18	55.21	54.37	96/3/13	61.61	54.59

（续）

日期	无铅汽油	燃料油	日期	无铅汽油	燃料油
96/3/14	62.45	55.07	96/5/8	68.37	54.87
96/3/15	62.92	57.87	96/5/9	67.23	54.56
96/3/18	64.31	60.28	96/5/10	68.48	54.95
96/3/19	65.15	62.26	96/5/13	69.11	56.19
96/3/20	64.38	63.12	96/5/14	68.43	55.32
96/3/21	64.03	61.33	96/5/15	67.2	54.81
96/3/22	65.49	62.65	96/5/16	64.2	53
96/3/25	67	63.2	96/5/17	63.03	52.94
96/3/26	66.25	64.88	96/5/20	66.04	55.24
96/3/27	65.72	65.93	96/5/21	64.95	54.06
96/3/28	64.44	63.54	96/5/22	64.3	54.99
96/3/29	64.94	62.76	96/5/23	64.25	54.39
96/4/1	66	57.98	96/5/24	64.72	54.46
96/4/2	68.11	59.72	96/5/27	64.72	54.46
96/4/3	67.69	58.22	96/5/28	63.15	54.18
96/4/4	68.76	59.57	96/5/29	62.36	54.06
96/4/5	68.76	59.57	96/5/30	59.88	52.09
96/4/8	69.86	60.19	96/5/31	59.12	50.85
96/4/9	70.52	60.64	96/6/3	58.99	51.25
96/4/10	72.99	62.51	96/6/4	60.69	51.52
96/4/11	74.3	64.02	96/6/5	59.39	50.85
96/4/12	72.17	62.02	96/6/6	60.22	51.04
96/4/15	71.71	62.62	96/6/7	60.91	51.78
96/4/16	69.45	59.54	96/6/10	61.4	51.4
96/4/17	68.12	58.09	96/6/11	60.8	50.79
96/4/18	66.4	55.4	96/6/12	59.68	50.88
96/4/19	67.49	55.72	96/6/13	58.89	50.95
96/4/22	70.19	55.06	96/6/14	59.5	51.55
96/4/23	73.18	57.3	96/6/17	61.21	53.34
96/4/24	74.1	58.2	96/6/18	60.24	52.5
96/4/25	75.61	58.76	96/6/19	57.96	51.12
96/4/26	76.81	59.27	96/6/20	58.68	51.53
96/4/29	77.01	62.28	96/6/21	58.74	51.36
96/4/30	72.39	61.82	96/6/24	58.23	51.3
96/5/1	67.42	54.16	96/6/25	57.46	51.17
96/5/2	68.4	53.94	96/6/26	58.36	52.34
96/5/3	69.92	54.74	96/6/27	59.36	53.64
96/5/6	68.85	54.56	96/6/28	60.03	53.95
96/5/7	68.81	54.79	96/7/1	61.51	55.14

（续）

日期	无铅汽油	燃料油	日期	无铅汽油	燃料油
96/7/2	60.89	54.28	96/8/26	61.62	61.03
96/7/3	62.47	54.71	96/8/27	61.21	61.13
96/7/4	62.47	54.71	96/8/28	62.33	62.04
96/7/5	62.47	54.71	96/8/29	63.72	63.67
96/7/8	61.68	54.89	96/8/30	62.82	62.82
96/7/9	61.81	55.26	96/9/2	62.82	62.82
96/7/10	63.11	55.59	96/9/3	62.96	65.07
96/7/11	64.59	56.7	96/9/4	62.96	64.21
96/7/12	64	56.62	96/9/5	64.41	65.03
96/7/15	65.56	57.72	96/9/6	65.27	66.4
96/7/16	65.13	57.18	96/9/9	64.09	65.95
96/7/17	63.89	56.32	96/9/10	64.85	66.67
96/7/18	63.87	56.74	96/9/11	65.91	68.19
96/7/19	62.41	56.02	96/9/12	65.91	69.17
96/7/22	62.76	55.85	96/9/13	64.6	67.94
96/7/23	63.08	55.94	96/9/16	62.87	65.29
96/7/24	61.87	55.95	96/9/17	62.74	65.59
96/7/25	61.66	56.25	96/9/18	63.06	67.87
96/7/26	60.16	55.04	96/9/19	61.32	66.77
96/7/29	60.52	55.19	96/9/20	61.09	67.42
96/7/30	61.23	55.65	96/9/23	60.07	67.48
96/7/31	61.8	57.08	96/9/24	62.83	69.69
96/8/1	61.38	57.53	96/9/25	63.1	71.77
96/8/2	62.12	58.71	96/9/26	62.99	70.9
96/8/5	61.31	58.29	96/9/27	64.6	71.49
96/8/6	61.23	57.43	96/9/30	62.71	71.51
96/8/7	62	58.22	96/10/1	62.82	70.76
96/8/8	62.27	58.79	96/10/2	62.42	71.98
96/8/9	61.87	58.49	96/10/3	63.68	74.69
96/8/12	62.89	59.56	96/10/4	63.63	74.43
96/8/13	63.09	60.01	96/10/7	66.34	76.49
96/8/14	62.49	60.41	96/10/8	66.5	76.19
96/8/15	61.96	59.68	96/10/9	65.59	73.97
96/8/16	63.38	61.63	96/10/10	63.52	70.92
96/8/19	65.27	62.58	96/10/11	65.52	71.43
96/8/20	64.01	61.67	96/10/14	67.7	74.07
96/8/21	63.12	60.98	96/10/15	67.08	73.07
96/8/22	63.88	62.48	96/10/16	65.45	71.56
96/8/23	63.22	61.99	96/10/17	66.53	72.29

（续）

日期	无铅汽油	燃料油	日期	无铅汽油	燃料油
96/10/18	67.94	74.06	96/12/12	64.72	68.67
96/10/21	67.92	73.63	96/12/13	67.04	71.71
96/10/22	69.12	73.45	96/12/16	69.52	74.82
96/10/23	68.16	70.96	96/12/17	69.77	73.54
96/10/24	69.22	70.49	96/12/18	71.17	74.18
96/10/25	70.1	71.72	96/12/19	71.22	73.78
96/10/28	70.3	71.46	96/12/20	70.19	72.97
96/10/29	69.1	69.83	96/12/23	68.9	71.08
96/10/30	70	68.46	96/12/24	69.56	71.4
96/10/31	66.56	66.34	96/12/25	69.56	71.4
96/11/1	64.7	66.6	96/12/26	69.51	70.06
96/11/4	65	65.95	96/12/27	69.74	70.55
96/11/5	64.61	65.42	96/12/30	69.61	70.57
96/11/6	63.63	66.45	96/12/31	70.67	72.84
96/11/7	63.8	66.89	97/1/1	70.67	72.84
96/11/8	65.27	68.93	97/1/2	71.1	72.11
96/11/11	65.02	68.35	97/1/3	70.7	71.29
96/11/12	65.77	68.25	97/1/6	72.52	73.64
96/11/13	68.34	71.2	97/1/7	72.1	72.49
96/11/14	68.92	73.4	97/1/8	72.19	73.43
96/11/15	66.92	72.61	97/1/9	70.48	73.05
96/11/18	65.77	71.85	97/1/10	70.36	72.15
96/11/19	67.39	73.68	97/1/13	68.09	69.7
96/11/20	65.39	72.09	97/1/14	67.04	69.42
96/11/21	67.04	73.85	97/1/15	68.85	71.42
96/11/22	67.8	72.79	97/1/16	68.69	69.92
96/11/25	67.99	72.23	97/1/17	68.09	68.44
96/11/26	69.01	71.24	97/1/20	67.23	66.94
96/11/27	69.35	71.97	97/1/21	67.44	66.03
96/11/28	69.35	71.97	97/1/22	68.22	66.89
96/11/29	69.35	71.97	97/1/23	68.42	66.35
96/12/2	68.12	73.57	97/1/24	67.75	66.77
96/12/3	69.13	74.22	97/1/27	67.62	67.29
96/12/4	68.24	73.57	97/1/28	67.04	66.83
96/12/5	69.68	75.11	97/1/29	68.23	68.84
96/12/6	69.8	74.66	97/1/30	69.82	70.34
96/12/9	68.88	72.13	97/1/31	68.47	68.65
96/12/10	66.86	69.62	97/2/3	68.35	65.28
96/12/11	63.56	66.82	97/2/4	68.31	64.18

（续）

日期	无铅汽油	燃料油	日期	无铅汽油	燃料油
97/2/5	67.54	63.32	97/4/1	62.67	53.95
97/2/6	65.3	61.45	97/4/2	60.61	52.52
97/2/7	63.06	60.53	97/4/3	60.9	53.26
97/2/10	63.53	61.76	97/4/4	60.48	53.14
97/2/11	63.96	61.86	97/4/7	60.72	53.13
97/2/12	62.89	60.85	97/4/8	61.17	52.89
97/2/13	63.18	59.92	97/4/9	60.7	53.11
97/2/14	64.25	60.81	97/4/10	61.07	54.86
97/2/17	64.25	60.81	97/4/11	60.88	53.87
97/2/18	64.16	59.42	97/4/14	61.96	54.67
97/2/19	64.68	59.59	97/4/15	61.9	54.85
97/2/20	62.78	58.04	97/4/16	60.38	53.48
97/2/21	61.82	57.85	97/4/17	60.7	54
97/2/24	60.24	55.47	97/4/18	61.49	54.68
97/2/25	62.23	56.82	97/4/21	62.8	55.48
97/2/26	62.26	56.68	97/4/22	61.77	54.83
97/2/27	62.67	56.03	97/4/23	61.74	55.65
97/2/28	61.65	54.76	97/4/24	62.84	55.89
97/3/3	61.77	53.18	97/4/25	62.5	55.9
97/3/4	62.89	53.34	97/4/28	62.34	56.53
97/3/5	63.33	52.54	97/4/29	63.36	58.91
97/3/6	64.48	53.43	97/4/30	63.91	58.07
97/3/7	65.67	54.08	97/5/1	62.63	54.33
97/3/10	64.36	53.08	97/5/2	60.52	53.02
97/3/11	63.86	52.83	97/5/5	60.54	53.05
97/3/12	64.63	54.08	97/5/6	60.31	53.53
97/3/13	64.23	54.22	97/5/7	60.92	53.08
97/3/14	65.77	55.33	97/5/8	62.5	54.38
97/3/17	65.26	54.3	97/5/9	62.89	54.52
97/3/18	67.48	56.18	97/5/12	64.47	56.65
97/3/19	67.96	56.29	97/5/13	64.76	56.48
97/3/20	67.58	55.94	97/5/14	64.38	56.42
97/3/21	67.64	55.98	97/5/15	64.04	56.48
97/3/24	66.51	55.73	97/5/16	65.87	58.47
97/3/25	66.52	56.83	97/5/19	65.21	57.92
97/3/26	64.82	55.43	97/5/20	65.39	57.64
97/3/27	64.63	56.07	97/5/21	66.53	57.55
97/3/28	64.63	56.07	97/5/22	66.93	57.8
97/3/31	63.68	56.72	97/5/23	66.92	57.52

（续）

日期	无铅汽油	燃料油	日期	无铅汽油	燃料油
97/5/26	66.92	57.52	97/7/18	60.05	52.22
97/5/27	65.38	55.27	97/7/21	60.04	52.35
97/5/28	65.8	55.39	97/7/22	60.02	52.7
97/5/29	65.15	56	97/7/23	61.12	53.28
97/5/30	63.68	56.49	97/7/24	62.21	53.39
97/6/2	63.68	56.32	97/7/25	64.03	53.99
97/6/3	61.44	54.62	97/7/28	64.84	54.14
97/6/4	60.42	54.16	97/7/29	66.47	54.31
97/6/5	59.82	53.32	97/7/30	69.9	55.78
97/6/6	57.13	51.52	97/7/31	67.84	55.61
97/6/9	56.2	51.5	97/8/1	65.07	56.56
97/6/10	56.4	51.65	97/8/4	66.74	58.44
97/6/11	56.54	51.52	97/8/5	67.1	58.32
97/6/12	57.08	51.62	97/8/6	66.06	56.98
97/6/13	57.4	51.64	97/8/7	64.33	55.3
97/6/16	58.03	51.94	97/8/8	61.99	54.29
97/6/17	58.48	52.45	97/8/11	61.47	54.36
97/6/18	56.78	51.44	97/8/12	63.71	55.1
97/6/19	56.09	51.45	97/8/13	66.08	56.04
97/6/20	55.48	51.33	97/8/14	66.33	55.87
97/6/23	55.64	51.92	97/8/15	66.81	55.25
97/6/24	55.68	51.57	97/8/18	65.44	55.09
97/6/25	56.97	52.99	97/8/19	67.58	55.71
97/6/26	56.79	52.02	97/8/20	69.64	55.1
97/6/27	57.91	53.33	97/8/21	67.15	53.48
97/6/30	58.12	53.7	97/8/22	67.48	53.41
97/7/1	58.78	54.84	97/8/25	64.5	52.2
97/7/2	59.29	54.92	97/8/26	63.81	52.09
97/7/3	57.92	52.76	97/8/27	66.4	53.26
97/7/4	57.92	52.76	97/8/28	67.51	52.51
97/7/7	57.94	52.78	97/8/29	68.82	51.85
97/7/8	58.92	53	97/9/1	68.82	51.85
97/7/9	58.23	52.65	97/9/2	62.79	53.4
97/7/10	58.6	52.11	97/9/3	62.55	53.35
97/7/11	59.26	52.35	97/9/4	59.92	52.54
97/7/14	58.35	51.67	97/9/5	60.12	53.78
97/7/15	59.94	52.95	97/9/8	59.32	53.14
97/7/16	60.46	52.68	97/9/9	59.49	52.83
97/7/17	61.89	53.89	97/9/10	58.33	51.57

（续）

日期	无铅汽油	燃料油	日期	无铅汽油	燃料油
97/9/11	58.78	52.05	97/10/27	59.95	57.74
97/9/12	58.77	52.58	97/10/28	58.88	56.52
97/9/15	58.22	52.52	97/10/29	60.09	57.19
97/9/16	59.04	53.85	97/10/30	60.67	58.12
97/9/17	58.45	53.35	97/10/31	60.22	57.77
97/9/18	57.25	53.44	97/11/3	59.8	58.78
97/9/19	57.48	53.45	97/11/4	58.96	58.11
97/9/22	58.58	54.73	97/11/5	58.2	57.18
97/9/23	58.36	54.64	97/11/6	59.26	57.43
97/9/24	58.37	55.24	97/11/7	59.95	57.99
97/9/25	59.25	56.51	97/11/10	59.18	57.28
97/9/26	61.34	57.92	97/11/11	59.06	57.82
97/9/29	63.13	59.25	97/11/12	58.62	57.92
97/9/30	62.63	58.77	97/11/13	59.55	58.62
97/10/1	59.9	58.19	97/11/14	60.99	59.54
97/10/2	61.43	59.8	97/11/17	59.44	57.85
97/10/3	62.99	62.01	97/11/18	58.65	57.61
97/10/6	61.3	59.69	97/11/19	58.65	56.67
97/10/7	60.91	59.6	97/11/20	57.22	55.45
97/10/8	61.5	60.16	97/11/21	57.74	55.48
97/10/9	61.18	60.08	97/11/24	58.69	55.6
97/10/10	61.24	59.95	97/11/25	59.08	55.49
97/10/13	59.83	58.27	97/11/26	57.31	53.1
97/10/14	58.88	57.01	97/11/27	57.31	53.1
97/10/15	58.2	56.94	97/11/28	57.31	53.1
97/10/16	59.68	58.01	97/12/1	56.25	52.71
97/10/17	59.31	57.4	97/12/2	56.43	53.25
97/10/20	59.66	57.82	97/12/3	56.55	53.5
97/10/21	59.08	57.64	97/12/4	56.34	53.35
97/10/22	60.79	58.77	97/12/5	56.59	53.38
97/10/23	60.26	58.09	97/12/8	56.96	53.52
97/10/24	59.6	57.03			

293
~
301

索 引

索引中的页码为英文原书的页码，与书中边栏标注的页码一致．

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

R

S

T

U

V

Y

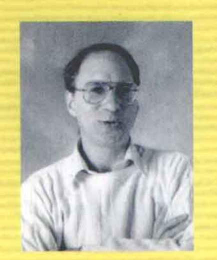
（原书第3版）

数理金融初步

本书基于期权定价全面介绍数理金融学的基本问题，数理推导严密，内容深入浅出，适合受过有限数学训练的专业交易员和高等院校相关专业本科生阅读。本书清晰简洁地阐述了套利、Black-Scholes期权定价公式、效用函数、最优投资组合选择、资本资产定价模型等知识。

第3版在第2版的基础上新增了布朗运动与几何布朗运动、随机序关系、随机动态规划等内容，并且扩展了每一章的习题和参考文献。

作者简介



Sheldon M. Ross 美国南加州大学工业与系统工程系Epstein讲座教授。他于1968年在斯坦福大学获得统计学博士学位，1976至2004年在加州大学伯克利分校任教。他发表了大量有关概率与统计方面的学术论文，并出版了多部教材。他还创办了《Probability in Engineering and Informational Sciences》杂志并一直担任主编。他是数理统计学会会员，荣获过美国科学家Humboldt奖。

An Elementary Introduction to Mathematical Finance
(Third Edition)

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS
www.cambridge.org



上架指导：数学

ISBN 978-7-111-41109-3



定价：39.00元

客服热线：(010) 88378991 88361066
购书热线：(010) 68326294 88379649 68995259
投稿热线：(010) 88379604
读者信箱：hzjsj@hzbook.com
华章网站：www.hzbook.com
网上购书：www.china-pub.com

封面设计·杨宇梅